



**UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID**

**ESCUELA POLITÉCNICA SUPERIOR**

**DEPARTAMENTO DE INGENIERIA TÉRMICA Y DE FLUIDOS**

**TRANSFERENCIA DE CALOR EN UN LECHO FIJO  
PARA ALMACENAMIENTO DE ENERGÍA TÉRMICA**

**PROYECTO FIN DE CARRERA**

**AUTOR: JOSÉ IGNACIO LÓPEZ TORRES**

**TUTORA: DR. CELIA SOBRINO FERNÁNDEZ**

## **AGRADECIMIENTOS:**

A la tutora del proyecto, Dr. Celia Sobrino Fernández por toda la ayuda prestada.

A mis amigos de toda la vida, por estar siempre ahí.

A mis amigos de la UCLM. A mis compañeros de piso, David, Eduardo, Fernando y Jesús, por aguantarme y porque sin vosotros nada hubiera sido igual.

Por último a mi familia, y en especial a mis tíos Javier, Raquel y José Manuel, a mi abuela Paula, a mi hermana Natalia, y en especial a mis padres, Jacinto y Esther, porque sin vuestro esfuerzo y dedicación no hubiese sido capaz de llegar al final del camino.

SEPTIEMBRE 2012





## **ÍNDICE**

<b><u>NOTACIÓN</u></b>	<b>3</b>
<b><u>CAPITULO 1: INTRODUCCIÓN</u></b>	<b>6</b>
1.1 OBJETIVO DEL ESTUDIO	9
1.2 DESCRIPCION DE LA INSTALACIÓN	10
1.3 ESTRUCTURA DE LA MEMORIA	11
<b><u>CAPITULO 2: MODELO DEL LECHO FIJO</u></b>	<b>13</b>
2.1 ECUACIONES DEL LECHO FIJO	14
2.1.1 ECUACION DE LA ENERGÍA PARA EL SÓLIDO	15
2.1.2 ECUACION DE LA ENERGÍA PARA EL FLUIDO	17
2.2 CONDICIONES INICIALES Y DE CONTORNO	18
<b><u>CAPITULO 3: ACONDICIONAMIENTO DEL MODELO. CORRELACIONES Y CGTC</u></b>	<b>20</b>
3.1 ADIMENSIONALIZACION DE LAS ECUACIONES DE LECHO	21
3.1.1 VARIABLES ADIMENSIONALES	21
3.1.2 ADIMENSIONALIZACIÓN DE LA ECUACION DEL SÓLIDO	25
3.1.3 ADIMENSIONALIZACIÓN DE LA ECUACION DEL FLUIDO	26
3.1.4 ADIMENSIONALIZACIÓN DE LAS CONDICIONES DE CONTORNO	27
3.2 CORRELACIONES	29
3.2.1 COEFICIENTES DE TRANSFERENCIAS DE CALOR	29
3.2.2 CONDUCTIVIDADES TÉRMICAS EFECTIVAS	31
3.3 COEFICIENTE GLOBAL DE TRANSFERENCIA DE CALOR (CGTC)	32



<b><u>CAPITULO 4: METODO DIFERENCIAS FINITAS</u></b>	<b>35</b>
4.1 DISCRETIZACIÓN	36
4.1.1 DISCRETIZACIÓN DEL DOMINIO	37
4.1.2 DISCRETIZACIÓN DE LAS DERIVADAS ESPACIALES	38
4.1.3 DISCRETIZACIÓN TEMPORAL	39
4.1.4 DISCRETIZACIÓN DE LAS CONDICIONES DE CONTORNO	40
4.2 DESARROLLO DEL MÉTODO	42
4.2.1 ANALISIS SENSIBILIDAD NUMERO DE NODOS	46
4.2.2 CONVERGENCIA NUMÉRICA (CFL)	46
 <b><u>CAPITULO 5: RESULTADOS Y COMPARACIÓN</u></b>	 <b>48</b>
5.1 DEFINICION Y CALCULO NUMERICO DE LOS PARAMETROS DEL LECHO	49
5.2 RESULTADOS	55
5.3 ESTUDIO DE LOS PARÁMETROS DE OPERACIÓN:	59
5.3.1 CAUDAL DE AIRE	59
5.3.2 ALTURA DE LECHO	80
5.4 FACTOR DE ALMACENAMIENTO DEL LECHO Y EFICIENCIA	95
5.4.1 FACTOR DE ALMACENAMIENTO (BSF)	95
5.4.2 EFICIENCIA ( $\eta$ )	102
5.5 COMPARACION DE LOS RESULTADOS EMPÍRICOS Y SIMULADOS	107
 <b><u>CAPITULO 6: CONCLUSIONES Y ESTUDIOS FUTUROS</u></b>	 <b>114</b>
<b><u>BIBLIOGRAFIA</u></b>	<b>117</b>
<b><u>ANEXO A: PROGRAMA MATLAB</u></b>	<b>119</b>



## NOTACIÓN

$a_p$	área superficial de las partículas por unidad de volumen del lecho (1/m)
$a_w$	área superficial interior del lecho por unidad de volumen del lecho (1/m)
$Bi$	número adimensional de Biot ( )
$c_p$	calor específico (J/kg·K)
$D$	diámetro interior del lecho fijo (m)
$D_{iso}$	diámetro exterior de la capa aislante (m)
$D_w$	diámetro exterior del lecho (m)
$d_p$	diámetro de las partículas que forman el lecho (m)
$Fo$	número adimensional de Fourier ( )
$Gr$	número de Grashof ( )
$g$	aceleración de la gravedad ( $9.81 \text{ m/s}^2$ )
$h$	coeficiente de transferencia de calor ( $\text{W/m}^2\cdot\text{k}$ )
$K$	conductividad térmica ( $\text{W/m}\cdot\text{k}$ )
$K_{iso}$	conductividad térmica del aislante ( $\text{W/m}\cdot\text{k}$ )
$K_w$	conductividad térmica de la pared del lecho ( $\text{W/m}\cdot\text{k}$ )
$K_{,x}$	conductividad térmica efectiva ( $\text{W/m}\cdot\text{k}$ )
$L$	altura del lecho (m)
$Nu$	número de Nusselt ( )
$Pr$	número de Prandtl ( )
$Q$	caudal de aire (l/min)
$Ra$	número de Rayleigh ( )
$R_{t,t}$	resistencia térmica total por unidad de longitud (k/W)
$Re$	número de Reynolds ( )

$T$	temperatura del fluido ( $^{\circ}\text{C}$ )
$\hat{T}$	temperatura adimensional del fluido ( )
$t$	tiempo (s)
$U$	coeficiente global de transferencia de calor ( $\text{W}/\text{m}^2\cdot\text{k}$ )
$U_s$	velocidad superficial del fluido (m/s)
$u$	velocidad intersticial del fluido (m/s)
$x$	distancia longitudinal del lecho (m)

**Letras griegas**

$\alpha$	difusividad térmica ( $\text{m}^2/\text{s}$ )
$\beta$	coeficiente de expansión térmica ( $^{\circ}\text{C}^{-1}$ )
$\varepsilon$	fracción de volumen - porosidad ( )
$\rho$	densidad ( $\text{kg}/\text{m}^3$ )
$\theta$	temperatura del sólido ( $^{\circ}\text{C}$ )
$\hat{\theta}$	temperatura adimensional del sólido ( )
$\nu$	viscosidad cinemática ( $\text{m}^2/\text{s}$ )
$\mu$	viscosidad dinámica ( $\text{kg}/\text{m}\cdot\text{s}$ )
$\eta$	rendimiento



### Subíndices

0	inicial
a	aire
in	entrada
iso	aislante
max	máximo
p	partículas
s	sólido
w	pared



# **1.INTRODUCCIÓN**

La creciente preocupación que existe en la actualidad por el uso adecuado de los recursos naturales y energéticos, los cuales determinan en gran medida la viabilidad económica, ambiental y social de cualquier actividad productiva, ha llevado en las últimas décadas a estudios para el desarrollo de nuevas formas de energía y la implementación de nuevos procesos para un uso de la forma más eficiente. En este contexto los lechos y sus diferentes aplicaciones se han convertido en una alternativa muy a tener en cuenta para alcanzar tales propósitos.

Un lecho consiste en una columna de una determinada altura formada por partículas sólidas, a través de las cuales pasa un fluido, bien sea líquido o gas, el cual previamente puede ser filtrado de impurezas y sufre una caída de presión. La altura del lecho, que aparecerá con asiduidad a lo largo del presente estudio, es la longitud del mismo compuesta por el sólido.

Si el fluido se mueve a velocidades bajas a través del lecho, no produce movimiento de las partículas, pero al ir incrementando gradualmente la velocidad, llega un momento donde las partículas no permanecen estáticas, sino que se agitan y levantan. Dicho proceso recibe el nombre de fluidización. La velocidad del fluido que atraviesa el lecho define el tipo del mismo:

- si la velocidad del fluido es menor a la velocidad de mínima fluidización, se denomina lecho fijo, porque las partículas permanecen en reposo. Esto provoca que tanto la altura como la fracción de vacío en el lecho o porosidad se mantengan constantes.
- si la velocidad del fluido es mayor que la velocidad de mínima fluidización, las partículas salen del reposo y el lecho se denomina lecho fluidizado.

Los lechos fluidizados no son objeto de estudio del presente proyecto, mientras que se centrará en los lechos fijos. En cualquier caso existe un valor característico e importante para la velocidad del aire, que es aquel valor de velocidad que provoca el paso de un régimen a otro, recibiendo el nombre de velocidad de mínima fluidización.

Dentro de los lechos fijos, se pueden diferenciar por su conformación estructural dos tipos: lechos fijos rellenos y porosos. Los lechos fijos rellenos son aquellos formados por partículas sólidas y homogéneas, como por ejemplo pilas de rocas, filtros de arena o columnas de absorción. Las columnas de absorción se rellenan normalmente con objetos cerámicos, de plástico o metálicos de formas especiales; tales como anillos, que tienen un gran área superficial y una elevada fracción de huecos, presentando por tanto una baja resistencia al flujo. Por su parte los lechos fijos porosos se conforman con materiales porosos, tales como partículas de alúmina sinterizadas, esponjas de espuma de poliuretano, colchones de espuma de caucho, etc.

Tanto los lechos fijos como los fluidizados tienen presencia en un gran número de industrias: química, bioquímica, petroquímica, alimentaria, etc; y en diferentes aplicaciones: filtros, catalizadores, secado, absorción e intercambio iónico, combustión del carbón, gasificación del carbón, lavado o lixiviación de partículas sólidas, biorreactores de lecho fluidizado, intercambiadores regenerativos de calor y un largo etcétera, siendo esta última, el almacenamiento de energía térmica en lechos fijos donde se centra el estudio y que se caracteriza por su simplicidad y bajo coste.

Para aquellos sistemas de energía en los que existe una diferencia temporal entre su fuente de energía y su utilización se hace necesaria alguna forma de almacenamiento de energía para asegurar la continuidad del proceso térmico. En este aspecto existe un gran campo de aplicaciones para los sistemas de energía solar térmica. También el almacenamiento de calor es un medio para almacenar la energía excedente de un determinado proceso para su uso posterior cuando sea necesario. El almacenamiento térmico puede ser de dos tipos: por calor sensible o latente, siendo los primeros los más extendidos. Los sistemas de almacenamiento por calor sensible se basan en el principio según el cual la fase del material energético en el que se almacena no cambia durante la transferencia de calor. El almacenamiento se lleva a cabo aumentando la temperatura del medio de almacenamiento cuando circula a través de él un fluido caliente, por ello es necesario que dicho medio tenga una capacidad térmica elevada y estabilidad a largo plazo. Este proceso se conoce como carga del lecho; para aprovechar esta energía térmica previamente almacenada, tan solo hay que introducir en el lecho un fluido que puede encontrarse a temperatura ambiente, el cual se calienta debido a la temperatura acumulada en el lecho. Este proceso se conoce como descarga o recuperación térmica.

En la literatura se pueden encontrar un gran número de estudios acerca del proceso de almacenamiento térmico en lechos, tanto fijos como fluidizados, con y sin cambio de fase, y que proponen un modelo que explica dicho proceso. El primer estudio analítico del modelado de lechos fijos se atribuye a Schumann (*“Heat transfer: a liquid flowing through a porous prism”*, 1929), y un gran número de publicaciones acerca de los sistemas de almacenamiento térmico en lechos fijos emplea su modelo, el *modelo de Schumann*. Se trata de un modelo de dos fases, transitorio y unidimensional que permite la predicción de la distribución axial y temporal de las temperaturas de sólidos y fluidos. Existen otros estudios en los que se tienen en cuenta variaciones radiales, como las publicaciones de Beasley y Clark (1983) donde se analiza la respuesta transitoria del almacenamiento de energía térmica en lechos fijos.

También hay un gran número de publicaciones que analizan como afecta en el proceso de almacenamiento térmico una serie de parámetros importantes del lecho como la porosidad, el material y tamaño de las partículas del lecho, la altura del lecho o el caudal del fluido de entrada. Destacar en este aspecto el texto de Rady [1], del cual se

han extraído las ecuaciones que definen el modelo a analizar para el estudio del proceso de almacenamiento térmico en un lecho fijo. Por otra parte, a lo largo del estudio, se hace referencia a otros autores, que han sido consultados para la obtención de parámetros necesarios para resolver el modelo de ecuaciones, como son los coeficientes de transferencia de calor o las conductividades térmicas efectivas.

## **1.1 OBJETIVO DEL ESTUDIO**

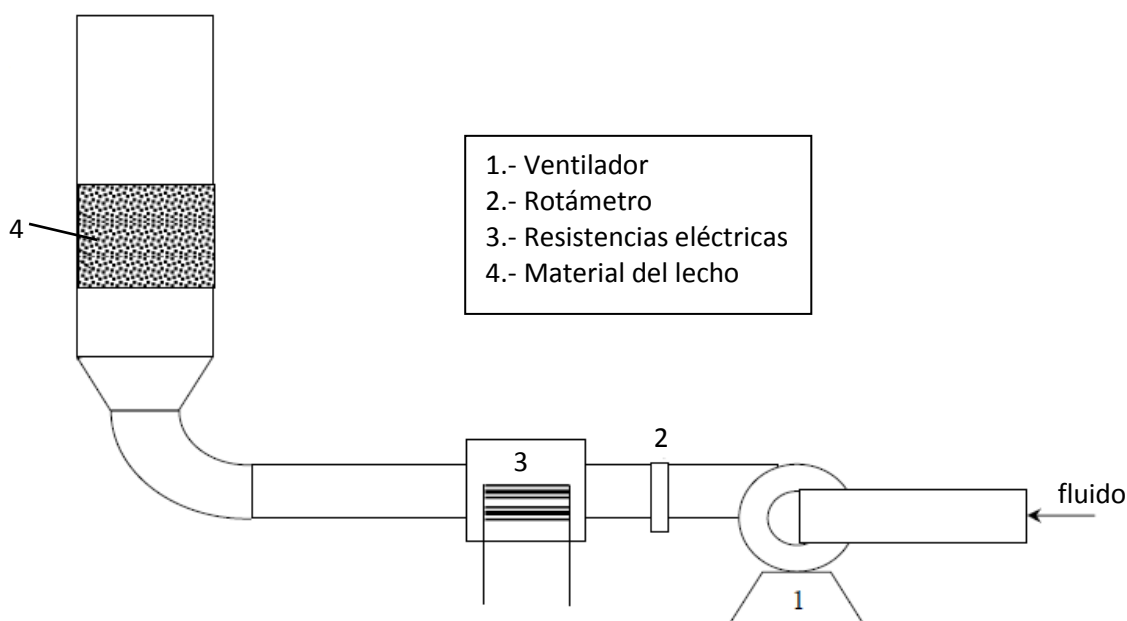
El objetivo del presente proyecto es el análisis del proceso de transferencia de calor en un lecho fijo para el almacenamiento de energía térmica. Para ello habrá que modelar el proceso de transferencia térmica a partir de un sistema de dos fases: se presentará un sistema en derivadas parciales, una ecuación para el sólido y otra para el fluido. Se estudiará el caso unidimensional, en el que solo existen variaciones de temperatura en la dirección axial y en el que no existe cambio de fase en el material de almacenamiento.

A continuación se resolverán las ecuaciones mediante el método de diferencias finitas para el que previamente habrá que realizar un acondicionamiento del modelo mediante la adimensionalización y discretización de las ecuaciones. Para alcanzar los resultados se hará uso del método matricial y del software matemático Matlab para la programación numérica.

Se analizará el proceso de almacenamiento térmico en un lecho de referencia de altura igual al diámetro a través de parámetros como la eficiencia o el factor de almacenamiento del lecho y se examinará como afecta a estos parámetros la variación del caudal de aire de entrada (con velocidades inferiores a la de mínima fluidización) o de la altura del lecho. Por último se compararán los resultados obtenidos del lecho simulado con medidas obtenidas experimentalmente que han sido proporcionadas para tal efecto por la tutora del proyecto y que han sido realizadas por el departamento de Ingeniería Térmica y de Fluidos de la Universidad Carlos III de Madrid.

## 1.2 DESCRIPCIÓN DE LA INSTALACIÓN

En el siguiente esquemático se muestra la disposición de los elementos mediante los cuales se puede simular el proceso de almacenamiento térmico en un lecho fijo y que además ha sido empleado en el departamento de Ingeniería Térmica y de Fluidos para obtener las mediciones experimentales:



**Fig. 1.1.** *Esquemático del montaje experimental*

Como se puede observar en la figura, las partículas sólidas del lecho se encuentran agrupadas en un cilindro de un determinado diámetro, espesor y material, en el caso del experimento era de acero inoxidable y recubierto de un material aislante; mediante el cual se consigue canalizar el aire de entrada al lecho. Una fina malla permeable permite fijar el lecho y que las partículas no descieran. A través de un ventilador se consigue que el flujo de aire canalizado a través de la tubería que conecta con el cilindro atraviese el lecho. El rotámetro permite medir el caudal de aire de entrada.

Unas resistencias eléctricas permiten calentar el fluido y así, almacenar calor en el lecho simulando el proceso de carga del mismo. Para poder medir el proceso de almacenamiento térmico se disponen a lo largo de la altura del lecho una serie de termopares separados entre sí una determinada distancia y a través de los cuales se puede conocer la evolución temporal de la temperatura a lo largo del lecho, en ambos procesos de carga y descarga.

Por último indicar que tanto los materiales como dimensiones del lecho empleados experimentalmente en el laboratorio, son los mismos que se han utilizado para simular el lecho de referencia del modelo matemático, y que se definen en el capítulo 5, para posteriormente poder comparar los resultados empíricos con los obtenidos de la simulación. El fluido de entrada será aire y el material de las partículas del lecho arena.

### 1.3 ESTRUCTURA DE LA MEMORIA

La memoria del estudio se compone de seis capítulos, incluyendo este capítulo introductorio y el último donde se exponen las conclusiones a las que se han llegado, los cuales se han intentado ordenar siguiendo el mismo orden en el que se realizó el estudio. Se estructuran del siguiente modo:

- Capítulo 2: Describe los modos de transferencia de calor que aparecen en los lechos fijos, las ecuaciones que explican los procesos de transferencia de calor dentro del lecho, para el sólido y para el fluido que envuelve a las partículas que forman el lecho, y por último las condiciones iniciales y de contorno necesarias para poder resolver el modelo mediante un método matemático.
- Capítulo 3: Presentación de las variables adimensionales empleadas para adimensionalizar las ecuaciones del lecho. A continuación se procede a la adimensionalización de las ecuaciones así como de las condiciones iniciales y de contorno. Por último se exponen las correlaciones empleadas para el cálculo de los coeficientes de transmisión de calor por convección y de las conductividades térmicas efectivas, y se obtiene la expresión que permite calcular el coeficiente global de transferencia de calor en el lecho necesario para evaluar las pérdidas a través de la pared del lecho.
- Capítulo 4: Se expone el método de diferencias finitas para la resolución del modelo. Previamente se explica la discretización de las ecuaciones de ambas fases, así como de las condiciones de contorno, y a continuación se describe el método matricial mediante el que se resolverá el sistema de ecuaciones obtenido. Se analiza cada uno de uno de los vectores y matrices que forman el método y se explica como construirlos. Por último se describe como elegir cada paso espacial y temporal necesario para la simulación.
- Capítulo 5: En este capítulo se muestran y analizan los resultados obtenidos tras la resolución del modelo. En primer lugar se procede a la definición de los parámetros del lecho de referencia: características geométricas, propiedades térmicas del sólido y el fluido; así como el cálculo de aquellos parámetros para los cuales se ha hecho uso de las correlaciones pertinentes: conductividades térmicas efectivas y coeficientes de transferencia de calor por convección.



Seguidamente se presentan los resultados obtenidos de la resolución del modelo mediante diferencias finitas para el lecho de referencia: a través de gráficas se muestra la evolución temporal de la temperatura en distintas zonas del lecho situadas a diferentes alturas y se expone como afecta al proceso de almacenamiento térmico la variación de los parámetros de operación: el caudal de aire de entrada al lecho y la altura del mismo. También se analizan estas variaciones que provocan los parámetros de operación en el almacenamiento de calor mediante la definición del factor de almacenamiento del lecho y de la eficiencia. Por último se comparan los resultados obtenidos de la simulación con los obtenidos experimentalmente.

## **2. MODELO DEL LECHO FIJO**



## 2.1 ECUACIONES DEL LECHO FIJO

Modelar de forma detallada los procesos de transferencia de calor que tienen lugar entre el fluido y el lecho es bastante complejo. La tasa de transferencia de calor desde o hacia el sólido en el lecho, es función de las propiedades físicas del fluido y del sólido, de la velocidad de flujo del fluido y de las características físicas del lecho. Existen diferentes modelos que explican el proceso de almacenamiento térmico en lechos fijos, aunque en la mayor parte de estos se supone que la geometría del lecho es cilíndrica, las propiedades termofísicas del fluido y del sólido son independientes de la temperatura, no existe generación de calor dentro del lecho, no se producen reacciones químicas, se desprecia el mecanismo de transferencia de calor por radiación y existen pérdidas de calor al ambiente.

Se pueden distinguir los siguientes modos de transferencia de calor en un lecho fijo:

- Transferencia de calor por convección desde las paredes del lecho al fluido.
- Transferencia de calor por convección desde las partículas del sólido que forman el lecho al fluido.
- Transferencia de calor por conducción desde las paredes del lecho a las partículas del sólido que constituyen el lecho.
- Transferencia de calor por conducción entre las partículas del sólido.
- Transferencia de calor por radiación al ambiente.
- Transferencia de calor mediante la mezcla del fluido.

Muchas de estas contribuciones de calor pueden ser ignoradas en relación con otras; en el caso de lechos fijos con condiciones de pared adiabática, tanto la conducción radial en el lecho, así como la transferencia de calor entre el lecho y la superficie de la pared se pueden despreciar, tal como se indica en el texto de referencia de Rady [1]. Estas condiciones de pared adiabática a menudo son muy empleadas en la industria, y en el presente proyecto se ha considerado que el lecho está recubierto por una capa de material aislante, del mismo material y dimensiones que el empleado en el experimento con el cual compararemos en el capítulo 5. Por ello, se ha resuelto el caso unidimensional, en el que solo existen variaciones de temperatura en la dirección axial.

Las ecuaciones que explican la transferencia de calor en el lecho fijo se pueden obtener considerando un volumen representativo, que contenga en las diferentes proporciones aire ( $\varepsilon_a$ ) y sólido ( $\varepsilon_s$ ), y teniendo en cuenta la termodinámica de no equilibrio para cada una de las fases a diferente temperatura ( $T_s$ ,  $T_a$ ), se obtiene una ecuación para el sólido y otra para el fluido que envuelve al sólido. Ambas ecuaciones formarán el modelo ha resolver mediante diferencias finitas, para ello y resumiendo, se han teniendo en cuenta las siguientes consideraciones:

- modelo de dos fases, sólido y fluido.
- fluido newtoniano.
- capacidad constante de almacenamiento de calor del sólido.
- se desprecian las variaciones de temperatura en la dirección radial.
- no existe generación interna de calor.
- no existe transferencia de masa.
- se desprecian los efectos de la transferencia de calor por radiación.
- no existe cambio de fase.

A continuación se muestran en derivadas parciales, cada una de las ecuaciones de conservación de la energía, para el sólido y para el aire (Rady [1]):

### 2.1.1 ECUACIÓN DE LA ENERGÍA PARA EL SÓLIDO

La ecuación de conservación de la energía para el sólido del lecho, que se empleará para resolver el modelo es la siguiente:

$$\rho_s(1 - \varepsilon_a)c_{ps} \frac{\partial \theta}{\partial t} = (1 - \varepsilon_a)K_{s,x} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - ha_p(\theta - T) \quad (2.1)$$

Nótese respecto a la expresión que aparece en el texto de referencia [1], se ha suprimido el término de cambio de fase, pues no es objeto del presente proyecto, así como los términos de conducción en dirección radial.

El término anterior a la igualdad representa la tasa de cambio de entalpía dentro del sólido, donde  $\rho_s$  es la densidad de las partículas que forman el sólido;  $(1 - \varepsilon_a)$  es la

fracción de volumen que ocupa el sólido, pues  $\varepsilon_a$  es la fracción de vacío del lecho o de volumen que ocupa el aire, también llamada porosidad, sabiendo que:

$$\varepsilon_a + \varepsilon_s = 1 \quad (2.2)$$

La porosidad depende del tipo de partícula y de como esté distribuida o empaquetada en el lecho y puede calcularse como sigue:

$$\varepsilon_s = \frac{\text{volumen del sólido}}{\text{volumen del lecho}} \quad (2.3)$$

$c_{ps}$  es el calor específico de las partículas del sólido y  $\theta$  es la temperatura del sólido.

El primero de los términos después de la igualdad representa el intercambio de calor por conducción en la dirección axial en el sólido. El coeficiente  $K_{s,x}$  es la conductividad térmica efectiva en dirección axial para el sólido. No se trata de una conductividad tal como se entiende normalmente, asociada al fenómeno de conducción, sino que incluye otros mecanismos de transferencia de calor asociados a éste que se dan en el lecho: radiación, convección, dispersión térmica (generalmente los efectos radiactivos se ignoran). En el caso de que se tuviese un sistema monofásico, habría un único término, en este caso habrá otro coeficiente para el fluido. Para el cálculo de estas conductividades efectivas se ha empleado una correlación que se sugiere en otro de los textos de referencia de N. Wakao y S. Kaguei [2], indicada para el cálculo de la conductividad efectiva en dirección axial, la cuál se desarrollará en el capítulo 3.

El segundo y último de los términos que aparece a continuación de la igualdad expresa la transferencia de calor por convección entre las partículas del sólido y el fluido. El primer factor,  $h$ , simboliza el coeficiente de transferencia de calor por convección entre el fluido y el sólido. Para su cálculo se ha empleado la correlación de Galloway y Sage [3], desarrollada precisamente para obtener el coeficiente de transferencia de calor entre partículas y fluidos en lechos fijos. Se desarrollará en el capítulo 3. El segundo de los coeficientes,  $a_p$ , representa el área superficial de las partículas por unidad de volumen del lecho:

$$a_p = \frac{6(1-\varepsilon_a)}{d_p} \quad (2.4)$$

En la expresión 2.4,  $d_p$  se refiere al diámetro de cada una de las partículas que forman el lecho. Por último,  $T$  es la temperatura del aire.

### 2.1.2 ECUACIÓN DE LA ENERGÍA PARA EL FLUIDO

La ecuación de conservación de la energía para el fluido que envuelve las partículas del lecho sólido es la siguiente:

$$\rho_a \varepsilon_a c_{pa} \frac{\partial T}{\partial t} = \varepsilon_a K_{a,x} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + h a_p (\theta - T) - \rho_a \varepsilon_a c_{pa} u \frac{\partial T}{\partial x} + U a_w (T_0 - T) \quad (2.5)$$

Observar que con respecto a la expresión que aparece en el texto [1], se ha añadido el último de los términos, tal y como aparece en otro de los textos consultados de Ismail y Stuginsky [4].

El primero de los términos representa la tasa de cambio de entalpía del fluido, donde  $\rho_a$  es la densidad del fluido y  $c_{pa}$  es el calor específico del fluido (el resto de factores ya se explicó para el sólido).

El primer término tras la igualdad de la expresión 2.5 hace referencia al calor intercambiado por conducción en la dirección axial del fluido. De nuevo, como se dijo, vuelve a aparecer el concepto de conductividad térmica efectiva, en este caso para el fluido,  $K_{a,x}$ , cuyo valor teórico y numérico se desarrollarán en los capítulos 3 y 6 respectivamente.

El segundo de los términos tras la igualdad expresa la transferencia de calor por convección entre las partículas que forman el sólido del lecho y el fluido.

El tercer término representa la entalpía neta asociada al flujo del fluido. Aparece por primera vez el concepto de velocidad intersticial,  $u$ , que es la velocidad que lleva el flujo de aire a través de los poros del lecho y puede relacionarse con la velocidad superficial  $U_s$ , que será la de entrada del flujo de aire al lecho, del siguiente modo:

$$u = \frac{U_s}{\varepsilon_a} \quad (2.6)$$

El último de los términos de la igualdad 2.5, que como se indicó se ha añadido con respecto a la expresión de Rady, tiene en cuenta las pérdidas de energía al ambiente a través de la pared del lecho. En un primer momento no se consideraron, sin embargo como se verá en las simulaciones del capítulo 5, donde se compararán con datos experimentales, el modelo se ajusta mucho mejor a la realidad. A continuación se explica cada uno de los factores que lo componen:

- $U$ : es el coeficiente global de transferencia de calor, referido al área del lecho. Se obtiene a partir de la resistencia térmica total por unidad de longitud y del área interior del lecho:

$$U = \frac{1}{R_{t,t} \cdot \text{Área}} \quad (2.7)$$

El cálculo teórico del coeficiente  $U$  se detalla en el capítulo 3, y el valor numérico empleado para las simulaciones se calcula en el capítulo 5 del presente documento.

$-a_w$ : es el área interior superficial de la pared del lecho referido al volumen del mismo.

$-(T_0 - T)$ : es la diferencia entre la temperatura inicial del lecho y la temperatura del fluido.

## 2.2 CONDICIONES INICIALES Y DE CONTORNO

Para completar la descripción matemática del modelo es necesario definir las condiciones iniciales y de contorno del problema, tanto para la carga como para la descarga.

La condición inicial consiste en que tanto el sólido del lecho, como el aire se encuentran a una temperatura inicial y uniforme  $T_0$ , cuyo valor corresponderá con la temperatura ambiente y que definiremos a comienzos del capítulo 5. En el instante cero del proceso de carga se comienza a introducir en el lecho un flujo de aire de trabajo a una temperatura  $T_{in}$ , de modo que  $T_{in} > T_0$ .

$$T = \theta = T_0 ; \text{ en } t = 0 \quad (2.8)$$

En el caso de la descarga, la condición inicial para el sólido y el aire cambia, y consiste en que sus temperaturas serán la que alcancen al final del proceso de carga o calentamiento del lecho. El proceso de descarga comienza cuando se deja de introducir aire caliente y se introduce en el lecho un flujo de aire a una menor temperatura que el aire introducido durante el proceso de carga, de modo que  $T_{in} < T_0$ .

En cuanto a las condiciones de contorno en la entrada del lecho ( $x = 0$ ) la temperatura del fluido se puede expresar tal como sigue:

$$T = T_{in} ; \text{ en } x = 0 \quad (2.9)$$

En cuanto a la temperatura del sólido, en la zona anterior a la entrada del lecho no existe sólido, por lo tanto no existe intercambio de calor, con lo que se puede expresar:

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = 0; \text{ en } x = 0 \quad (2.10)$$

Para la salida del lecho se puede usar un argumento similar al anterior, tanto para el sólido como para el fluido, pues al no existir más lecho, el sólido no puede intercambiar más calor, y además el fluido en la salida no intercambia calor con el fluido por delante de él, por lo tanto:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0; \text{ en } x = L \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = 0; \text{ en } x = L \quad (2.12)$$

Ya se verá en el capítulo 4, como en función del tipo de condición de contorno, bien sea para la entrada del lecho o para la salida, habrá que realizar un tipo de discretización u otra, progresiva o regresiva.

### **3. ACONDICIONAMIENTO DEL MODELO. CORRELACIONES Y CGTC**

### 3.1 ADIMENSIONALIZACIÓN DE LAS ECUACIONES DEL LECHO

Mediante la adimensionalización de las ecuaciones del modelo se van a conseguir unas expresiones más compactas y fáciles de manejar tanto para los cálculos numéricos como a la hora de la programación en matlab, así como la posibilidad de cuantificar la importancia relativa de cada uno de los términos. Por ello a lo largo del presente estudio se trabajará siempre con expresiones adimensionales, a excepción del momento en el que se presenten la evolución en la temperatura del lecho puesto que es más gráfico e intuitivo expresarlo con sus respectivas unidades, para ello simplemente habrá que deshacer la conversión adimensional.

#### 3.1.1 VARIABLES ADIMENSIONALES

Los parámetros adimensionales empleados para la adimensionalización de las ecuaciones del lecho son los siguientes:

$$\hat{T} = \frac{T - T_0}{T_{max} - T_0} \quad (3.1)$$

$$\hat{\theta} = \frac{\theta - T_0}{T_{max} - T_0} \quad (3.2)$$

$$\hat{t} = t \frac{u}{L} \quad (3.3)$$

$$\hat{x} = \frac{x}{L} \quad (3.4)$$

Las expresiones 3.1 y 3.2 se emplearán para la adimensionalización de la temperatura del fluido  $T$  que envuelve las partículas del lecho, y la del sólido  $\theta$  respectivamente;  $T_0$  es la temperatura mínima del aire de entrada y  $T_{max}$  es la máxima. En la expresión 3.3 y 3.4,  $L$  hace referencia a la altura del lecho, y cada una de ellas sirve para la adimensionalización del tiempo la primera, y de la altura en el lecho (coordenada axial) la segunda. El resto de parámetros ya han aparecido en el anterior capítulo.

Conocidas las variables adimensionales, se puede proceder a la adimensionalización de cada una de las derivadas temporales y espaciales de las temperaturas del sólido y el fluido que aparecen en las ecuaciones del lecho 2.1 y 2.5,



así como las diferencias de  $\theta$  y  $T$  que multiplican a los términos convectivos y en las pérdidas al ambiente a través de las paredes del lecho:

- Adimensionalización de las derivadas temporales:

Siguiendo la regla de la cadena, se puede expresar:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial T}{\partial \hat{t}} \frac{\partial \hat{t}}{\partial t} \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial \theta}{\partial \hat{t}} \frac{\partial \hat{t}}{\partial t} \quad (3.6)$$

Despejando  $T$  y  $\theta$  de las expresiones 3.1 y 3.2:

$$T = \hat{T}(T_{max} - T_0) + T_0 \quad (3.7)$$

$$\theta = \hat{\theta}(T_{max} - T_0) + T_0 \quad (3.8)$$

y calculando de la expresión 3.3 la derivada temporal de  $\hat{t}$  :

$$\frac{\partial \hat{t}}{\partial t} = \frac{u}{L} \quad (3.9)$$

Sustituyendo 3.7, 3.8 y 3.9 en 3.5 y 3.6 se puede expresar:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial T}{\partial \hat{t}} \frac{\partial \hat{t}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \hat{t}} (\hat{T}(T_{max} - T_0) + T_0) \frac{u}{L} = \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{t}} (T_{max} - T_0) \frac{u}{L} \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial \theta}{\partial \hat{t}} \frac{\partial \hat{t}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \hat{t}} (\hat{\theta}(T_{max} - T_0) + T_0) \frac{u}{L} = \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \hat{t}} (T_{max} - T_0) \frac{u}{L} \quad (3.11)$$

- Adimensionalización de las derivadas espaciales:

Siguiendo de nuevo la regla de la cadena:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \hat{x}}{\partial x} \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial \theta}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \hat{x}}{\partial x} \quad (3.13)$$

Y para las derivadas de segundo orden:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right) \quad (3.14)$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) \quad (3.15)$$

Habiendo obtenido anteriormente en 3.7 y 3.8 las expresiones de  $T$  y  $\theta$  en función de sus valores adimensionalizados, y obteniendo de 3.4 la derivada espacial de  $\hat{x}$ :

$$\frac{\partial \hat{x}}{\partial x} = \frac{1}{L} \quad (3.16)$$

Con 3.7, 3.8 y 3.16, se pueden expresar las derivadas espaciales como sigue:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \hat{x}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \hat{x}} (\hat{T}(T_{max}-T_0) + T_0) \frac{1}{L} = \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{x}} (T_{max} - T_0) \frac{1}{L} \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial \theta}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \hat{x}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \hat{x}} (\hat{\theta}(T_{max} - T_0) + T_0) \frac{1}{L} = \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \hat{x}} (T_{max} - T_0) \frac{1}{L} \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{x}} (T_{max} - T_0) \frac{1}{L} \right) = (T_{max} - T_0) \frac{1}{L} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{x}} = \\ &= (T_{max} - T_0) \frac{1}{L} \frac{\partial \hat{x}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{x}} = (T_{max} - T_0) \frac{1}{L} \frac{\partial \hat{x}}{\partial x} \frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial \hat{x}^2} = (T_{max} - T_0) \frac{1}{L^2} \frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial \hat{x}^2} \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \hat{x}} (T_{max} - T_0) \frac{1}{L} \right) = (T_{max} - T_0) \frac{1}{L} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \hat{x}} = \\ &= (T_{max} - T_0) \frac{1}{L} \frac{\partial \hat{x}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \hat{x}} = (T_{max} - T_0) \frac{1}{L} \frac{\partial \hat{x}}{\partial x} \frac{\partial^2 \hat{\theta}}{\partial \hat{x}^2} = (T_{max} - T_0) \frac{1}{L^2} \frac{\partial^2 \hat{\theta}}{\partial \hat{x}^2} \end{aligned} \quad (3.20)$$

- Adimensionalización de las diferencias  $(\theta - T)$  y  $(T_0 - T)$ :

Para adimensionalizar de forma completa las ecuaciones del sólido y el fluido, es necesario por último, expresar los términos en diferencia referentes a la transmisión de calor por convección y el término relacionado con las pérdidas a través de la pared en su forma adimensional:

Con 3.7 y 3.8 se puede expresar  $(\theta - T)$  y  $(T_0 - T)$  así:

$$(\theta - T) = \hat{\theta}(T_{max} - T_0) + T_0 - (\hat{T}(T_{max} - T_0) + T_0) = (T_{max} - T_0)(\hat{\theta} - \hat{T}) \quad (3.21)$$

$$(T_0 - T) = T_0 - (\hat{T}(T_{max} - T_0) + T_0) = -\hat{T}(T_{max} - T_0) \quad (3.22)$$

Una vez que se han conseguido adimensionalizar las derivadas y expresiones en diferencia donde aparecen las temperaturas del sólido y el fluido, mediante el uso de los siguientes números adimensionales de Biot y Fourier para el aire, el sólido y la pared se conseguirán compactar las expresiones:

$$Fo_a = \frac{\alpha_a}{Lu} \quad (3.23)$$

$$Bi_a = \frac{hL^2 a_p}{K_{a,x}\varepsilon} \quad (3.24)$$

$$Fo_s = \frac{\alpha_s}{Lu} \quad (3.25)$$

$$Bi_s = \frac{hL^2 a_p}{K_{s,x}(1-\varepsilon)} \quad (3.26)$$

$$Bi_w = \frac{Ua_w L^2}{K_{a,x}\varepsilon} \quad (3.27)$$

En las expresiones 3.23 y 3.25 referentes al número de Fourier, el término  $\alpha$  es la difusividad térmica para el aire y el sólido y puede expresarse:  $\alpha = \frac{K_{,x}}{\rho C_p}$ , por lo que Fourier se puede expresar como:

$$Fo = \frac{K_{,x}}{\rho C_p Lu} \quad (3.28)$$

### 3.1.2 ADIMENSIONALIZACIÓN DE LA ECUACIÓN DEL SÓLIDO

Partiendo de la ecuación del sólido 2.1, se puede sustituir en primer lugar el valor de cada derivada por su expresión adimensionalizada a partir de las formulaciones 3.11, 3.20 y 3.21:

$$\rho_s(1 - \varepsilon_a)c_{ps} \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \hat{t}} (T_{max} - T_0) \frac{u}{L} = (1 - \varepsilon_a)K_{s,x}(T_{max} - T_0) \frac{1}{L^2} \frac{\partial^2 \hat{\theta}}{\partial \hat{x}^2} - ha_p(T_{max} - T_0)(\hat{\theta} - \hat{T})$$

Se puede simplificar a ambos lados el término  $(T_{max} - T_0)$  quedando:

$$\rho_s(1 - \varepsilon_a)c_{ps} \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \hat{t}} \frac{u}{L} = (1 - \varepsilon_a)K_{s,x} \frac{1}{L^2} \frac{\partial^2 \hat{\theta}}{\partial \hat{x}^2} - ha_p(\hat{\theta} - \hat{T})$$

Y se despeja para dejar a un lado de la igualdad el término de la derivada temporal adimensional de la temperatura del sólido quedando:

$$\frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \hat{t}} = \underbrace{\frac{K_{s,x}}{\rho_s c_{ps} L u}}_{Fo_s} \frac{\partial^2 \hat{\theta}}{\partial \hat{x}^2} - \underbrace{\frac{hLa_p}{\rho_s(1 - \varepsilon_a)c_{ps} u}}_{(A)} (\hat{\theta} - \hat{T})$$

Si se opera el término (A):

$$\frac{hLa_p}{\rho_s(1 - \varepsilon_a)c_{ps} u} = \frac{hL^2 a_p}{\rho_s(1 - \varepsilon_a)c_{ps} u L} \frac{Fo_s}{Fo_s}$$

El denominador excluyendo  $(1 - \varepsilon_a)$  es la conductividad térmica efectiva para el sólido (3.28):  $\rho_s c_{ps} u L Fo_s = K_{s,x}$ . El término (A) quedaría:

$$\frac{hL^2 a_p}{K_{s,x}(1 - \varepsilon_a)} Fo_s = Bi_s Fo_s$$

Con lo que definitivamente la ecuación adimensionalizada para el sólido se puede expresar:

$$\boxed{\frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \hat{t}} = Fo_s \frac{\partial^2 \hat{\theta}}{\partial \hat{x}^2} - Bi_s Fo_s (\hat{\theta} - \hat{T})} \quad (3.29)$$

### 3.1.3 ADIMENSIONALIZACIÓN DE LA ECUACIÓN DEL FLUIDO

Procediendo de forma análoga para la ecuación del fluido 2.5, se sustituye cada derivada por su expresión adimensionalizada mediante las formulaciones 3.10, 3.17 y 3.19, así como las expresiones en diferencia a partir de los términos 3.21 y 3.22:

$$\rho_a \varepsilon_a c_{pa} \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{t}} (T_{max} - T_0) \frac{u}{L} = \varepsilon_a K_{a,x} (T_{max} - T_0) \frac{1}{L^2} \frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial \hat{x}^2} + h a_p (T_{max} - T_0) (\hat{\theta} - \hat{T}) - \rho_a \varepsilon_a c_{pa} \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{x}} (T_{max} - T_0) \frac{u}{L} - U a_w (T_{max} - T_0) \hat{T}$$

De nuevo se puede simplificar a ambos lados de la igualdad  $(T_{max} - T_0)$  quedando:

$$\rho_a \varepsilon_a c_{pa} \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{t}} \frac{u}{L} = \varepsilon_a K_{a,x} \frac{1}{L^2} \frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial \hat{x}^2} + h a_p (\hat{\theta} - \hat{T}) - \rho_a \varepsilon_a c_{pa} \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{x}} \frac{u}{L} - U a_w \hat{T}$$

Y se despeja la derivada temporal de la temperatura del fluido dejándola a un lado de la igualdad:

$$\frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{t}} = \underbrace{\frac{K_{a,x}}{\rho_a c_{pa} L u}}_{Fo_a} \frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial \hat{x}^2} + \underbrace{\frac{h a_p L}{\rho_a \varepsilon_a c_{pa} u}}_{(A)} (\hat{\theta} - \hat{T}) - \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{x}} - \underbrace{\frac{U a_w L}{\rho_a \varepsilon_a c_{pa} u}}_{(B)} \hat{T}$$

- Operando en primer lugar el término (A):

$$\frac{h L a_p}{\rho_a \varepsilon_a c_{pa} u} = \frac{h L^2 a_p}{\rho_a \varepsilon_a c_{pa} u L} \frac{Fo_a}{Fo_a}$$

El denominador excluyendo la porosidad  $\varepsilon_a$  es la conductividad térmica efectiva para el fluido (3.28):  $\rho_a c_{pa} u L Fo_a = K_{a,x}$ . El término (A) quedaría:

$$\frac{h L^2 a_p}{K_{a,x} \varepsilon_a} Fo_a = Bi_a Fo_a$$

- Simplificando por último el término (B):  $\frac{Ua_w L}{\rho_a \varepsilon_a c_{pa} u} = \frac{Ua_w L^2}{\rho_a \varepsilon_a c_{pa} u L}$ , utilizando la expresión 3.28 se puede expresar parte del denominador:  $\rho_a c_{pa} u L = \frac{K_{a,x}}{Fo_a}$ , con lo que el término (B) quedaría:

$$\frac{Ua_w L^2 Fo_a}{\varepsilon_a K_{a,x}} = Bi_w Fo_a$$

Con lo que definitivamente la ecuación adimensionalizada para el fluido se puede expresar:

$$\boxed{\frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{t}} = Fo_a \frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial \hat{x}^2} + Bi_a Fo_a (\hat{\theta} - \hat{T}) - \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{x}} - Bi_w Fo_a \hat{T}} \quad (3.30)$$

### 3.1.4 ADIMENSIONALIZACIÓN DE LAS CONDICIONES DE CONTORNO

En el capítulo 2 ya se definieron las condiciones tanto iniciales como de contorno, a continuación se muestra la adimensionalización de las mismas:

- Adimensionalización de la condición inicial:

La condición inicial dimensional era:  $T = \theta = T_0$  en  $t = 0$ , introduciendo el valor de  $T$  y  $\theta$  en las expresiones adimensionales 3.1 y 3.2 queda:

$$\hat{T} = \frac{T - T_0}{T_{max} - T_0} = \frac{T_0 - T_0}{T_{max} - T_0} = 0$$

$$\hat{\theta} = \frac{\theta - T_0}{T_{max} - T_0} = \frac{T_0 - T_0}{T_{max} - T_0} = 0$$

Con lo que la condición inicial adimensional, para  $\hat{t} = 0$  queda:

$$\hat{T}_{\hat{t}=0} = \hat{\theta}_{\hat{t}=0} = 0 \quad (3.31)$$

- Adimensionalización de la condición de contorno en  $x = 0$ :

La condición de contorno dimensional para el fluido en  $x = 0$  era  $T = T_{in}$ , introduciendo el valor de  $T$  en la expresión adimensional 3.1 queda:

$$\hat{T} = \frac{T-T_0}{T_{max}-T_0} = \frac{T_{in}-T_0}{T_{max}-T_0}$$

La condición de contorno dimensional para el sólido en  $x = 0$  era  $\frac{\partial \theta}{\partial x} = 0$ , introduciendo el valor de la derivada dimensional en la expresión 3.18 queda:

$$\frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \hat{x}} = 0$$

Con lo que las condiciones de contorno adimensionales para  $\hat{x} = 0$  son:

$$\hat{T}_{\hat{x}=0} = \frac{T_{in}-T_0}{T_{max}-T_0}; \left. \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \hat{x}} \right|_{\hat{x}=0} = 0 \quad (3.32)$$

- Adimensionalización de la condición de contorno en  $x = L$ :

La condición de contorno dimensional para el fluido y el sólido en  $x = L$  era  $\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0$ , introduciendo el valor de la derivada dimensional en la expresión 3.17 y 3.18:

$$\frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{x}} = \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \hat{x}} = 0$$

Con lo que las condiciones de contorno adimensionales para  $\hat{x} = 1$  son:

$$\left. \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{x}} \right|_{\hat{x}=1} = 0; \left. \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \hat{x}} \right|_{\hat{x}=1} = 0 \quad (3.33)$$

Nota:  $\hat{x} = 1$  corresponde a la posición final del lecho en adimensional, pues según la expresión 3.4:  $\hat{x} = \frac{x}{L}$ , con lo que para  $x = L$ :  $\hat{x} = \frac{L}{L} = 1$ .

## 3.2 CORRELACIONES

Se han tenido que hacer uso de una serie de correlaciones para el cálculo de los coeficientes de transferencia de calor por convección  $h$ , así como para el cálculo de las conductividades térmicas efectivas  $K_{a,x}$  y  $K_{s,x}$ . Para encontrar estos parámetros normalmente se emplean correlaciones empíricas obtenidas a través de métodos iterativos de cálculo, en los cuales se miden los perfiles experimentales de temperatura, se propone una solución a las ecuaciones de balance de energía para el lecho y se procede a encontrar el mejor ajuste a los datos experimentales. Estos datos se obtienen para diferentes condiciones de flujo, geometrías, tamaños y materiales de elementos con los que se obtienen correlaciones relacionando los valores de los parámetros obtenidos con las variables modificadas durante la experimentación.

### 3.2.1 COEFICIENTES DE TRANSFERENCIA DE CALOR

Se pueden distinguir en el lecho tres zonas de diferentes características donde se produce intercambio de calor por convección, por ello habrá que emplear en cada una de ellas una correlación diferente para obtener el coeficiente de transferencia de calor: intercambio de calor entre las partículas y el fluido, entre el fluido y la pared del lecho y el intercambio con el exterior.

- Coeficiente transferencia calor entre partículas y fluido –  $h$ :

Existen en la literatura un gran número de correlaciones para el cálculo del número de Nusselt en aplicaciones de almacenamiento de energía mediante partículas, sin embargo, como hacen referencia Ismail y Stuginsky [4] en su texto, todas ellas producen resultados similares. Para el cálculo del coeficiente de transferencia de calor entre las partículas del lecho y el fluido se ha empleado la correlación que aparece en el texto de Galloway y Sage [3], desarrollada por los autores para tal efecto, mediante la cual se puede obtener el número de Nusselt:

$$Nu = 2.0 + c_1 Re_d^{1/2} Pr^{1/3} + c_2 Re_d Pr^{1/2} \quad (3.34)$$

Donde los coeficientes  $c_1$  y  $c_2$  para un lecho cualquiera toman los valores de 1.354 y 0.0326 respectivamente. Sin embargo Rady [1] afirma según otros dos autores, Beasley y Clark [8], que tomando los valores de  $c_1 = 2.031$  y  $c_2 = 0.049$  se consiguen mejorar los resultados entre los datos numéricos y los experimentales, por lo que serán los que se empleen. En cuanto al resto de parámetros,  $Re_d$ , es el número de Reynolds referido al diámetro de las partículas, y  $Pr$  es el número de Prandtl:



$$Re_d = \frac{U_s d_p}{\nu} \quad (3.35)$$

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha} \quad (3.36)$$

En las expresiones 3.35 y 3.36,  $\nu$  es la viscosidad cinemática del fluido, que puede calcularse como el cociente entre la viscosidad dinámica  $\mu$  y la densidad del fluido  $\rho$ :  $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ .

A partir del número de Nusselt (3.34), se puede calcular el coeficiente de transferencia de calor por convección entre el fluido y las partículas sólidas del lecho:

$$h = \frac{Nu K_a}{d_p} \quad (3.37)$$

Siendo  $K_a$ , la conductividad térmica para el aire.

- Coeficiente transferencia calor entre paredes y fluido –  $h_w$ :

Para el segundo de los coeficientes de transferencia de calor por convección, que se denominará  $h_w$ , intercambio que ocurre entre el fluido y las paredes interiores del lecho, se estaría ante un caso de convección forzada en flujo interno. Se ha hecho uso de la correlación que sugieren Galloway y Sage [3]:

$$Nu = 2,576 Re_d^{1/3} Pr^{1/3} + 0,0936 Re_d^{0,8} Pr^{0,4} \quad (3.38)$$

Haciendo uso de la expresión 3.37, a partir del número de Nusselt se obtiene  $h_w$ .

- Coeficiente transferencia calor entre lecho y ambiente –  $h_{iso}$ :

Para el cálculo del coeficiente de transferencia de calor entre el lecho y el ambiente, se puede suponer al lecho como un cilindro inmerso en un flujo externo de convección libre. Aparece en el libro de referencia de Incropera y De Witt [5] una correlación de Churchill y Chu para placas verticales sometidas a flujos externos de convección libre:

$$Nu_L = 0,68 + \frac{0,67 Ra_L^{1/4}}{[1 + (0,492/Pr)^{9/16}]^{4/9}} \quad (3.39)$$

La expresión 3.39 es válida para  $Ra_L \leq 10^9$ , siendo  $Ra_L$  el número de Rayleigh para la longitud de la placa ( $L$ ), pudiéndose calcular mediante el producto entre el número de Prandtl (3.36) y el de Grashof ( $Gr$ ) para la longitud de la placa:

$$Ra_L = Gr_L Pr \quad (3.40)$$

siendo:

$$Gr_L = \frac{g\beta(T_s - T_\infty)L^3}{\nu^2} \quad (3.41)$$

donde  $g$  es la aceleración de la gravedad;  $\beta$  es el coeficiente de expansión térmica, depende del fluido y para un gas ideal vale  $\beta = \frac{1}{T}$ ;  $T_\infty$  es la temperatura ambiente y  $T_s$  la temperatura de la superficie del lecho en contacto con el ambiente.

Nuestra geometría no se trata de una placa vertical, sino de un cilindro, sin embargo la expresión 3.39 es aplicable a cilindros verticales de altura  $L$  en los que el espesor de la capa límite es mucho menor que el diámetro del cilindro, lo cual trasladado a la geometría de nuestro lecho de altura  $L$  y diámetro  $D$ , se cumple cuando:

$$\frac{D}{L} \geq \frac{35}{Gr_L^{1/4}} \quad (3.42)$$

Con el valor del Nusselt (3.39), puede calcularse el coeficiente de transferencia de calor por convección entre el lecho y el ambiente:

$$h_{iso} = \frac{Nu_L K_a}{L} \quad (3.43)$$

### 3.2.2 CONDUCTIVIDAD TÉRMICA EFECTIVA

Para el cálculo de las conductividades térmicas efectivas en la dirección axial se ha tenido que hacer uso de dos expresiones, una para calcular la conductividad térmica efectiva para el fluido  $K_{a,x}$  y otra para la conductividad del sólido  $K_{s,x}$ , aunque como se verá a continuación una es función de la anterior. En el texto de Ismail y Stuginsky [4] aparecen una serie de expresiones sugeridas por Wakao y Kaguei [2] que permiten el cálculo de las conductividades efectivas axiales:

$$\text{para el fluido: } K_{a,x} \begin{cases} 0,7K_a & Re_d \leq 0,8 \\ \frac{0,5 Pr Re_d K_a}{\varepsilon} & Re_d > 0,8 \end{cases} \quad (3.44)$$

$$\text{para el sólido: } K_{s,x} = \frac{K_e^0 + 0,5 Pr Re_p K_s - \varepsilon K_{a,x}}{1 - \varepsilon} \quad (3.45)$$

Como se puede observar en la expresión 3.45, la conductividad efectiva del sólido depende de la del fluido. En esta expresión  $K_e^0$  es la conductividad térmica efectiva estática, y puede calcularse así:

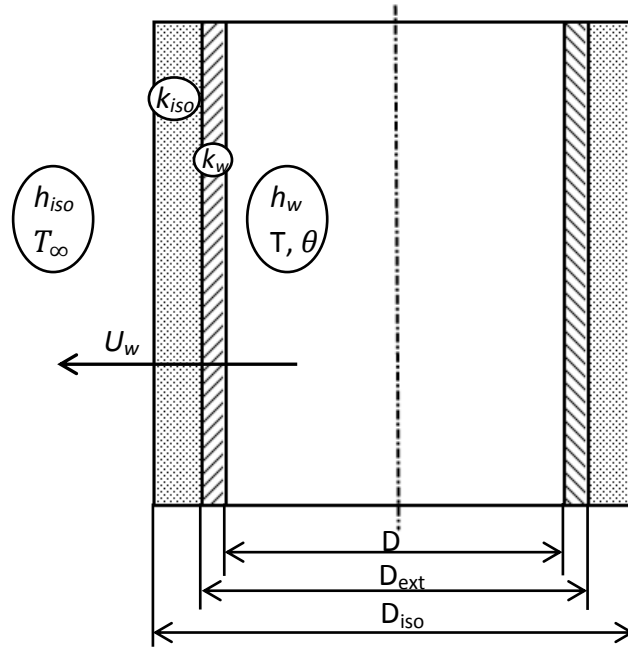
$$K_e^0 = K_a \left( \frac{K_s}{K_a} \right)^m \quad (3.46)$$

$$\text{donde: } m = 0,28 - 0,757 \log \varepsilon - 0,057 \log \left( \frac{K_s}{K_a} \right)$$

### 3.3 COEFICIENTE GLOBAL DE TRANSFERENCIA DE CALOR

Otro de los parámetros importantes en el proceso de almacenamiento de calor en un lecho fijo es el coeficiente global de transferencia de calor  $U$ , mediante el cual se podrán evaluar las pérdidas al ambiente y conseguir en la simulación un mejor ajuste entre está y los resultados empíricos. Su cálculo además, es necesario para poder resolver la ecuación ya discretizada del fluido (3.30).

Acorde a la expresión (2.2) que se adelantó en el capítulo anterior, se expresaba el coeficiente  $U$  referido al área interior del lecho como la inversa del producto de la resistencia térmica total y el área interior del lecho. Asumiendo que nuestro lecho esta formado por un cilindro vertical de un determinado material, diámetro y espesor, envuelto por un determinado aislante de espesor conocido, tal y como muestra la figura:



**Fig. 3.1.** Representación de la geometría del lecho

Donde  $D_{ext}$  es el diámetro externo de la tubería que contiene al lecho fijo y que a partir de ahora se denominará diámetro externo del lecho y  $D_{iso}$  es el diámetro externo de la capa aislante; se pueden conocer las resistencias térmicas equivalentes, aunque previamente se ha de conocer como se produce el intercambio de calor con el ambiente. En primer lugar se tiene un intercambio de calor por convección en el interior del lecho entre el fluido y la pared interna, a continuación el calor fluye por conducción a través de la pared del lecho para seguir por la capa aislante, y por último se produce el intercambio con el ambiente por convección. Conociendo la expresión de las resistencias térmicas asociadas a los procesos de convección, y conducción en coordenadas cilíndricas:

$$R_{t,h} = \frac{1}{h \cdot Area} \qquad R_{t,k} = \frac{\ln(d_{ext}/d_{int})}{2\pi KL}$$

la resistencia térmica total sería la suma de la asociación en serie de las cuatro resistencias térmicas, dos asociadas a conducción y otras dos a convección. Por lo que operando, y particularizando para la geometría indicada en la figura 3.1, el valor del coeficiente global de transferencia de calor en el lecho sería:

$$U = \frac{1}{R_{t,t} \cdot \text{Área}} = \frac{1}{\frac{1}{h_w} + \frac{D}{2K_w} \ln\left(\frac{D_{ext}}{D}\right) + \frac{D}{2K_{iso}} \ln\left(\frac{D_{iso}}{D_{ext}}\right) + \frac{D}{h_{iso} D_{iso}}} \quad (3.47)$$



donde todos los parámetros son conocidos, a excepción de  $K_w$ , que es la conductividad térmica del material del cilindro que contiene al lecho y  $K_{iso}$  que es la conductividad térmica del aislante.

## **4. MÉTODO DIFERENCIAS FINITAS**

Presentadas las ecuaciones que gobiernan el proceso de almacenamiento térmico en el lecho fijo, y una vez que tanto la ecuación del fluido como la del sólido han sido adimensionalizadas, el siguiente paso es su resolución mediante algún método matemático.

Existen diferentes métodos mediante los que resolver ecuaciones diferenciales en derivadas parciales: métodos analíticos, gráficos y numéricos. Mediante el enfoque analítico se puede conseguir una solución matemática exacta y en cualquier punto de interés de la zona de estudio, sin embargo tan solo es aplicable para un conjunto limitado de geometrías simples y condiciones de contorno, además de requerir series y funciones matemáticas complejas. Por el contrario y en comparación con los métodos analíticos, los métodos gráfico y numérico proporcionan resultados aproximados en puntos discretos, algo que es importante destacar y tener presente cuando se presenten los resultados. Sin embargo, permiten adaptarse a geometrías y condiciones de frontera compleja ofreciendo en estos casos resultados muy precisos. El método gráfico sirve para obtener una estimación aproximada. Uno de los métodos numéricos por excelencia y que se caracteriza por su facilidad de aplicación es el método de diferencias finitas, empleado en este proyecto.

El método de diferencias finitas consiste en una aproximación de las derivadas parciales por expresiones algebraicas con los valores de la variable dependiente en un limitado número de puntos seleccionados. Como resultado de esta aproximación las ecuaciones diferenciales que describen el problema serán reemplazadas por un número finito de ecuaciones algebraicas expresadas en términos de los valores de la variable dependiente en los puntos seleccionados. El valor de la variable o variables en estos puntos se convierten en las incógnitas, las cuales mediante un sistema de ecuaciones algebraicas y posteriormente expresado en forma matricial debe ser resuelto.

Por consiguiente, para poder aplicar el método el modelo requiere un acondicionamiento previo tanto de las ecuaciones como del medio de interés donde estas tienen aplicación. Esto es lo que se denomina discretización.

## **4.1 DISCRETIZACIÓN**

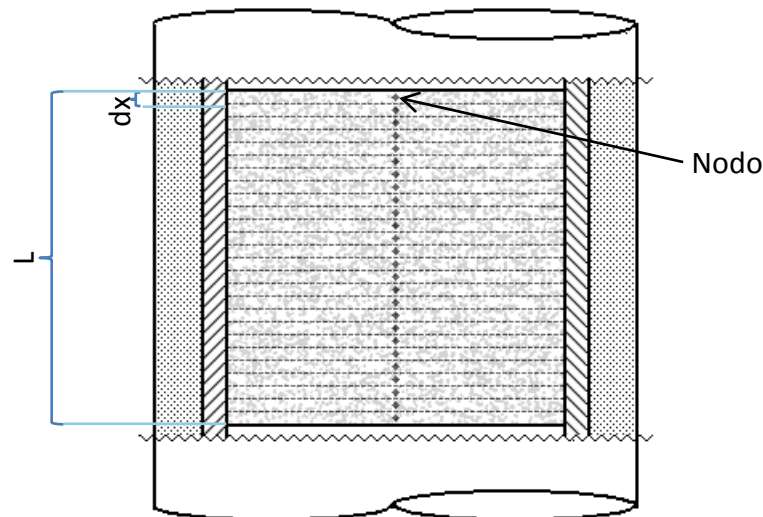
Mediante la discretización se podrán convertir las ecuaciones que se encuentran en derivadas parciales, en un sistema de ecuaciones algebraicas. Para ello en primer lugar hay que discretizar el dominio y a continuación las derivadas espaciales y temporales que aparecen en las ecuaciones adimensionalizadas de cada una de las fases:

#### 4.1.1 DISCRETIZACIÓN DEL DOMINIO

La discretización del dominio se basa en seleccionar los puntos del lecho en los que se van a resolver las ecuaciones. Se consigue al subdividir el medio de interés en un número de pequeñas regiones y asignar a cada una un punto de referencia en su centro. Cada punto es lo que se denomina como nodo, y al conjunto de nodos malla.

Cada nodo representa una cierta región del lecho, y su temperatura es una medida promedio de la región. Cuanto más fina sea la malla, es decir, a mayor número de nodos, más precisa será la solución que proporciona el método, sin embargo habrá que encontrar un compromiso entre resultados y tiempo de cómputo una vez que se resuelva el método en Matlab.

Al despreciar en el modelo la conducción radial en el lecho, tan sólo habrá que discretizar la altura, la dirección axial. Con ello se dividirá la zona del lecho donde se encuentra el sólido de altura  $L$ , en un conjunto de regiones de altura  $dx$ , con lo que se tendrá un grupo de nodos dispuestos en vertical a lo largo de la altura del lecho como se muestra en la figura:



**Fig. 4.1.** Representación de la disposición de los nodos



#### 4.1.2 DISCRETIZACIÓN DE LAS DERIVADAS ESPACIALES

En las ecuaciones de ambas fases, sólido y fluido, aparecían derivadas espaciales de primer y segundo orden.

Para la aproximación de las derivadas espaciales de primer orden mediante diferencias finitas, que solo aparecen en la expresión 3.30 y para la temperatura del fluido, se ha empleado el esquema de diferencia regresiva. Para ello se necesita la temperatura en el nodo precedente:

$$\frac{\partial \hat{T}_i}{\partial \hat{x}} = \frac{\hat{T}_i - \hat{T}_{i-1}}{\Delta \hat{x}} \quad 4.1$$

donde el subíndice  $i$  hace referencia al nodo donde se está calculando la temperatura,  $i-1$  es el nodo anterior, y  $\Delta \hat{x}$  es la separación axial entre nodos, en este caso ya adimensionalizada. Un caso especial ocurre a la hora de la discretización de las condiciones de contorno para el sólido a la entrada del lecho (2.9), pues el nodo situado en  $\hat{x}=0$ , que sería el primer nodo que aparece en el lecho, no tiene ningún nodo anterior, por lo que hay que emplear el esquema de diferencia progresiva, es decir, usar el nodo superior ( $i+1$ ):

$$\frac{\partial \hat{\theta}_i}{\partial \hat{x}} = \frac{\hat{\theta}_{i+1} - \hat{\theta}_i}{\Delta \hat{x}} \quad 4.2$$

Para la aproximación de las derivadas espaciales de segundo orden mediante diferencias finitas que aparecen en las ecuaciones para las temperaturas de ambas fases se ha empleado el esquema de diferencia centrada, para la cual se necesitan las temperaturas en los nodos inferior y superior:

para el sólido:

$$\frac{\partial^2 \hat{\theta}_i}{\partial \hat{x}^2} = \frac{\hat{\theta}_{i+1} - 2\hat{\theta}_i + \hat{\theta}_{i-1}}{\Delta \hat{x}^2} \quad 4.3$$

para el fluido:

$$\frac{\partial^2 \hat{T}_i}{\partial \hat{x}^2} = \frac{\hat{T}_{i+1} - 2\hat{T}_i + \hat{T}_{i-1}}{\Delta \hat{x}^2} \quad 4.4$$

### 4.1.3 DISCRETIZACIÓN TEMPORAL

Para la discretización de las derivadas temporales se pueden emplear dos métodos, uno explícito y otro implícito.

En el método explícito de discretización temporal la temperatura de cada nodo en un instante de tiempo  $t+1$  depende de los valores de la temperatura evaluados en el instante anterior  $t$ . Para el cálculo del nuevo nodo no se usan datos correspondientes a este nuevo punto sino la información de nodos anteriores, se toman diferencias progresivas. Este método es condicionalmente estable y requiere de una condición de estabilidad. El esquema explícito para la temperatura del sólido sería el siguiente:

$$\frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \hat{t}} = \frac{\hat{\theta}_i^{t+1} - \hat{\theta}_i^t}{\Delta \hat{t}} = f(\hat{\theta}_j^t, \hat{T}_j^t \text{ j vecinos de } i) \quad 4.5$$

Por su parte en el método implícito la temperatura de cada nodo en el instante  $t+1$  se calcula simultáneamente a partir de su temperatura en el instante  $t$  y de los valores de la temperatura de los nodos vecinos evaluados en el instante  $t+1$ , es decir, hace uso de valores en el mismo nivel de simulación en diferentes nodos empleando el método de diferencias regresivas. Este método da lugar a un sistema de ecuaciones lineales donde las variables desconocidas del instante  $t+1$  deben resolverse simultáneamente. La ventaja de este método comparado con el explícito erradica en que se pueden tener pasos temporales muchos mayores conservando la estabilidad en el proceso de integración y con ello reducir el tiempo de cálculo. Remarcar también que este último método es incondicionalmente estable. El esquema implícito para la temperatura del sólido sería el siguiente:

$$\frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \hat{t}} = \frac{\hat{\theta}_i^{t+1} - \hat{\theta}_i^t}{\Delta \hat{t}} = f(\hat{\theta}_j^{t+1}, \hat{T}_j^{t+1} \text{ j vecinos de } i) \quad 4.6$$

El método de discretización temporal empleado en el modelo es el implícito, y haciendo uso de las expresiones de diferencias regresivas 4.1 y centradas 4.3 y 4.4 en el caso que corresponda, partiendo de la ecuación adimensionalizada para el sólido 3.29, se muestra la ecuación adimensionalizada para la fase sólida en su forma de diferencias finitas:

$$\frac{\hat{\theta}_i^{t+1} - \hat{\theta}_i^t}{\Delta \hat{t}} = Fo_s \frac{\hat{\theta}_{i+1}^{t+1} - 2\hat{\theta}_i^{t+1} + \hat{\theta}_{i-1}^{t+1}}{\Delta \hat{x}^2} - Bi_s Fo_s (\hat{\theta}_i^{t+1} - \hat{T}_i^{t+1})$$

Agrupando los factores que multiplican a cada nodo ( $i$ ,  $i+1$  e  $i-1$ ) y situando a cada lado de la igualdad los términos en  $t+1$  y  $t$  queda:

$$\hat{\theta}_i^{t+1} \left( 1 + \frac{2\Delta\hat{t}Fo_s}{\Delta\hat{x}^2} + \Delta\hat{t}Bi_s Fo_s \right) - \hat{\theta}_{i+1}^{t+1} \frac{\Delta\hat{t}Fo_s}{\Delta\hat{x}^2} - \hat{\theta}_{i-1}^{t+1} \frac{\Delta\hat{t}Fo_s}{\Delta\hat{x}^2} - \hat{T}_i^{t+1} \Delta\hat{t}Bi_s Fo_s = \hat{\theta}_i^t$$

4.7

Y para la ecuación del fluido, su forma adimensional en diferencias finitas sería:

$$\frac{\hat{T}_i^{t+1} - \hat{T}_i^t}{\Delta\hat{t}} = Fo_a \frac{\hat{T}_{i+1}^{t+1} - 2\hat{T}_i^{t+1} + \hat{T}_{i-1}^{t+1}}{\Delta\hat{x}^2} + Bi_a Fo_a (\hat{\theta}_i^{t+1} - \hat{T}_i^{t+1}) - \frac{\hat{T}_i^{t+1} - \hat{T}_{i-1}^{t+1}}{\Delta\hat{x}} - Bi_w Fo_a \hat{T}_i^{t+1}$$

Haciendo la misma agrupación y ordenación anterior:

$$\hat{T}_i^{t+1} \left( 1 + \frac{2\Delta\hat{t}Fo_a}{\Delta\hat{x}^2} + \Delta\hat{t}Bi_a Fo_a + \Delta\hat{t}Bi_w Fo_a + \frac{\Delta\hat{t}}{\Delta\hat{x}} \right) - \hat{T}_{i+1}^{t+1} \frac{\Delta\hat{t}Fo_a}{\Delta\hat{x}^2} - \hat{T}_{i-1}^{t+1} \left( \frac{\Delta\hat{t}Fo_a}{\Delta\hat{x}^2} + \frac{\Delta\hat{t}}{\Delta\hat{x}} \right) - \hat{\theta}_i^{t+1} \Delta\hat{t}Bi_a Fo_a = \hat{T}_i^t$$

4.8

El sistema de ecuaciones, ya algebraicas, formado por las igualdades 4.7 y 4.8 nos permitirá encontrar para cada nodo  $i$  las temperaturas del fluido y el sólido para cada instante de tiempo, para ello se hará uso de métodos matriciales.

#### 4.1.4 DISCRETIZACIÓN CONDICIONES DE CONTORNO

Por último y para poder aplicar el método es necesario discretizar las condiciones de contorno a la entrada y salida del lecho. Tan solo es necesario modificar las condiciones que tienen derivadas espaciales, pues el resto son constantes que permanecen igual, como la condición inicial y de contorno a la entrada del lecho para el fluido. El resto queda así:

- Discretización de la condición de contorno del sólido en  $\hat{x} = 0$ :

La condición de contorno adimensionalizada para la temperatura del sólido en la entrada del lecho era:

$$\left. \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \hat{x}} \right|_{\hat{x}=0} = 0$$

Con lo que discretizando según el esquema de diferencia progresiva, pues como se indicó anteriormente se trata del primer nodo del lecho para el sólido,  $\hat{\theta}_1$ , queda:

$$\frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \hat{x}} = \frac{\hat{\theta}_{i+1}^{t+1} - \hat{\theta}_i^{t+1}}{\Delta \hat{x}} = \frac{\hat{\theta}_2^{t+1} - \hat{\theta}_1^{t+1}}{\Delta \hat{x}} = 0$$

Con lo que despejando:

$$\hat{\theta}_1^{t+1} = \hat{\theta}_2^{t+1} \quad 4.9$$

- Discretización de la condición de contorno del fluido y el sólido en  $\hat{x} = L$ :

La condición de contorno adimensionalizada para la temperatura del sólido y del fluido al final del lecho era:

$$\left. \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{x}} \right|_{\hat{x}=1} = 0 ; \left. \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \hat{x}} \right|_{\hat{x}=1} = 0$$

Y aplicando el esquema de diferencia regresiva, queda para el fluido:

$$\frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{x}} = \frac{\hat{T}_i^{t+1} - \hat{T}_{i-1}^{t+1}}{\Delta \hat{x}} = \frac{\hat{T}_n^{t+1} - \hat{T}_{n-1}^{t+1}}{\Delta \hat{x}} = 0$$

Donde n es el número total de nodos, y despejando queda:

$$\hat{T}_n^{t+1} = \hat{T}_{n-1}^{t+1} \quad 4.10$$

Y de forma análoga para el sólido:

$$\hat{\theta}_n^{t+1} = \hat{\theta}_{n-1}^{t+1} \quad 4.11$$

## 4.2 DESARROLLO DEL MÉTODO

Como se puede observar en las expresiones 2.1 y 2.5 donde se expresaba las ecuaciones para el sólido y el fluido, ambas están conectadas, es decir, para conocer la temperatura del sólido se ha de conocer la del fluido y viceversa. Por lo que mediante el método numérico se ha de ser capaz de resolver a la vez la temperatura en cada nodo para cada una de las fases.

Como se han dicho con anterioridad, el sistema de ecuaciones se va a resolver mediante métodos matriciales. Para ello se ha de plantear el sistema de ecuaciones; supóngase que se tiene un número  $n$  de nodos en el lecho, con lo que se tendrán  $n$  ecuaciones para la temperatura del sólido, una para cada nodo, y otras  $n$  ecuaciones para la temperatura del fluido que envuelve a las partículas sólidas del lecho, es decir, se tiene un sistema formado por  $2 \cdot n$  ecuaciones y  $2 \cdot n$  incógnitas, siendo estas las temperaturas en cada nodo para el sólido y el fluido. Teniendo en cuenta las condiciones de contorno para el sólido y el fluido en  $\hat{x}=0$  y  $\hat{x}=1$ , y poniendo en primer lugar las  $n$  ecuaciones referentes a la fase fluida, el sistema se puede expresar como sigue:

$$\begin{aligned} \hat{T}_1^{t+1} &= \frac{T_{in}-T_0}{T_{max}-T_0} \quad (C.C. \text{ en } \hat{x}=0) \\ \hat{T}_2^{t+1} \left( 1 + \frac{2\Delta\hat{t}Fo_a}{\Delta\hat{x}^2} + \Delta\hat{t}Bi_a Fo_a + \Delta\hat{t}Bi_w Fo_a + \frac{\Delta\hat{t}}{\Delta\hat{x}} \right) - \hat{T}_3^{t+1} \frac{\Delta\hat{t}Fo_a}{\Delta\hat{x}^2} - \hat{T}_1^{t+1} \left( \frac{\Delta\hat{t}Fo_a}{\Delta\hat{x}^2} + \frac{\Delta\hat{t}}{\Delta\hat{x}} \right) \\ - \hat{\theta}_2^{t+1} \Delta\hat{t}Bi_a Fo_a &= \hat{T}_2^t \\ &\vdots \\ \hat{T}_n^{t+1} &= \hat{T}_{n-1}^{t+1} \quad (C.C. \text{ en } \hat{x}=1) \\ \hat{\theta}_1^{t+1} &= \hat{\theta}_2^{t+1} \quad (C.C. \text{ en } \hat{x}=0) \\ \hat{\theta}_2^{t+1} \left( 1 + \frac{2\Delta\hat{t}Fo_s}{\Delta\hat{x}^2} + \Delta\hat{t}Bi_s Fo_s \right) - \hat{\theta}_3^{t+1} \frac{\Delta\hat{t}Fo_s}{\Delta\hat{x}^2} - \hat{\theta}_1^{t+1} \frac{\Delta\hat{t}Fo_s}{\Delta\hat{x}^2} - \hat{T}_2^{t+1} \Delta\hat{t}Bi_s Fo_s &= \hat{\theta}_2^t \\ &\vdots \\ \hat{\theta}_n^{t+1} &= \hat{\theta}_{n-1}^{t+1} \quad (C.C. \text{ en } \hat{x}=1) \end{aligned}$$

A continuación se expresa el sistema en forma matricial empleando el siguiente esquema:

$$\boxed{[M][\hat{T}]^{t+1} = [H][\hat{T}]^t + [B]} \quad 4.12$$

Donde  $[\hat{T}]$  es un vector columna de  $2 \cdot n$  filas, en el que cada fila representa la temperatura adimensional de cada nodo, las  $n$ -primeras filas están referidas a la temperatura del fluido y las  $n$ -restantes a las del sólido. El superíndice  $t$  hace referencia al valor de la temperatura en el instante anterior al nuevo valor que se quiere calcular en  $t+1$ , que sería el vector incógnita:

$$[\hat{T}]^{t+1} = \begin{bmatrix} \hat{T}_1^{t+1} \\ \hat{T}_2^{t+1} \\ \vdots \\ \hat{T}_n^{t+1} \\ \hat{\theta}_1^{t+1} \\ \hat{\theta}_2^{t+1} \\ \vdots \\ \hat{\theta}_n^{t+1} \end{bmatrix} \quad [\hat{T}]^t = \begin{bmatrix} \hat{T}_1^t \\ \hat{T}_2^t \\ \vdots \\ \hat{T}_n^t \\ \hat{\theta}_1^t \\ \hat{\theta}_2^t \\ \vdots \\ \hat{\theta}_n^t \end{bmatrix}$$

$[H]$  es una matriz cuadrada de  $2 \cdot n$  filas y  $2 \cdot n$  columnas, está formada por unos a lo largo de su diagonal principal a excepción de los términos  $1,1$   $n,n$   $(n+1),(n+1)$  y  $(2 \cdot n),(2 \cdot n)$  que son las posiciones correspondientes a los nodos de la entrada y salida del lecho donde se implementan las condiciones de contorno. En estos nodos no hay influencia de la temperatura propia del nodo en el instante anterior y por lo tanto vale 0:

$$[H] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \leftarrow \text{Fila } n \\ \uparrow \\ \text{Columna } n \end{array}$$

$[B]$  es otro vector columna formado por  $2 \cdot n$  filas que contiene los términos independientes. En este caso el único término independiente en el sistema de ecuaciones es el correspondiente a la condición de contorno para la temperatura del fluido en  $\hat{x}=0$ :

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{T_{in}-T_0}{T_{max}-T_0} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Por su parte  $[M]$  es una matriz cuadrada de  $2 \cdot n$  filas y  $2 \cdot n$  columnas que contiene los términos que multiplican a cada incógnita en los instantes  $t + I$ . Para los nodos primero y último (filas:  $1, n, n+1$  y  $2 \cdot n$ ), referentes a las condiciones de contorno en la entrada y salida del lecho, la matriz  $[M]$  se rellenaría así:

$$[M] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \text{Fila } n \\ \uparrow \\ \text{Columna } n \end{matrix}$$

Al primer nodo le corresponderían las filas  $1$  (C.C. en  $\hat{x}=0$  para el fluido) y  $n+1$  (C.C. en  $\hat{x}=0$  para el sólido), y al último nodo las filas  $n$  (C.C. en  $\hat{x}=1$  para el fluido) y  $2 \cdot n$  (C.C. en  $\hat{x}=1$  para el sólido). El resto de la matriz se completaría como se muestra a continuación, para un nodo genérico  $j$ :

$$[M] = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & -\left(\frac{\Delta \hat{t} Fo_a}{\Delta \hat{x}^2} + \frac{\Delta \hat{t}}{\Delta \hat{x}}\right) & \left(1 + \frac{2\Delta \hat{t} Fo_a}{\Delta \hat{x}^2} + \Delta \hat{t} Bi_a Fo_a + \Delta \hat{t} Bi_w Fo_a + \frac{\Delta \hat{t}}{\Delta \hat{x}}\right) & -\frac{\Delta \hat{t} Fo_a}{\Delta \hat{x}^2} & \dots & 0 & -\Delta \hat{t} Bi_a Fo_a & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -\Delta \hat{t} Bi_s Fo_s & 0 & \dots & -\frac{\Delta \hat{t} Fo_s}{\Delta \hat{x}^2} & \left(1 + \frac{2\Delta \hat{t} Fo_s}{\Delta \hat{x}^2} + \Delta \hat{t} Bi_s Fo_s\right) & -\frac{\Delta \hat{t} Fo_s}{\Delta \hat{x}^2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \text{Fila } j \\ \leftarrow \text{Fila } j+n \\ \uparrow \\ \text{Columna } j \\ \uparrow \\ \text{Columna } j+n \end{matrix}$$

Se completaría la fila  $j$  con los términos referentes a la ecuación del fluido, y la fila  $j+n$  con los referentes a la ecuación del sólido, ambos para el nodo  $j$ . Esto se repetiría para el resto de columnas sea cual sea el número de nodos ( $\forall n$ ), desde la fila  $2$  hasta la fila  $n-1$  para la ecuación de cada nodo referentes al fluido, y desde la fila  $n+2$  hasta la  $2 \cdot n-1$  para la ecuación de cada nodo referente a la fase sólida.

Partiendo del esquema matricial planteado en la expresión 4.12, para conseguir los valores de las temperaturas del fluido y el sólido en la carga y la descarga del lecho de cada uno de los nodos que están representadas en las incógnitas del vector  $[\hat{T}]^{t+1}$ , tan sólo habrá que invertir la matriz  $[M]$ :

$$[\hat{T}]^{t+1} = [M]^{-1}[H][\hat{T}]^t + [M]^{-1}[B] \quad 4.13$$

En cada paso temporal  $\Delta\hat{t}$  se consigue un nuevo vector  $[\hat{T}]^{t+1}$ , que representa las temperaturas para cada nodo en ese determinado instante. El vector  $[\hat{T}]^t$  debe ser actualizado en cada nuevo instante con los valores de  $[\hat{T}]^{t+1}$  obtenidos en el instante anterior, el resto de parámetros permanece constante. Con ello se consigue un grupo de vectores que unidos dan lugar a una matriz, donde cada fila de esta matriz representa la evolución de las temperaturas a lo largo del proceso de carga y descarga del lecho para cada nodo. Para la realización de todas estas operaciones, de inversión, producto y suma de matrices, así como todos los bucles necesarios para actualizar el vector  $[\hat{T}]^t$  en cada instante de tiempo a lo largo de todo el tiempo de simulación se hará uso de Matlab.

En cuanto a las condiciones iniciales necesarias para que la simulación pueda comenzar correctamente, éstas ya se definieron en el capítulo 2 y se adimensionalizaron en el capítulo 3, tanto para la carga como la descarga, tan solo hay que expresarlas en su forma matricial. La condición de partida en la carga era  $\hat{T}_{\hat{t}=0} = \hat{\theta}_{\hat{t}=0} = 0$ , por lo que para conseguir el vector de temperaturas en el primer instante, basta con realizar las operaciones indicadas en la expresión 4.13, dando al vector  $[\hat{T}]^t$  valor nulo. En cuanto a la descarga, la condición inicial consiste en dar al vector  $[\hat{T}]^t$  el valor que resulte en  $[\hat{T}]^{t+1}$  tras realizar las operaciones indicadas en 4.13 en el último instante perteneciente al proceso de carga del lecho. También para la descarga habrá que cambiar el valor del vector  $[B]$ , pues el valor de la temperatura de entrada del aire  $T_{in}$  cambia.

Para poder comenzar a aplicar el método tan solo habrá que definir las variables necesarias para la simulación, como son los pasos temporales  $\Delta\hat{t}$  y espaciales  $\Delta\hat{x}$ , este último vendrá definido por el número de nodos  $n$ ; así como la implementación de las condiciones iniciales para que la simulación comience.



### 4.2.1 ANÁLISIS SENSIBILIDAD NÚMERO DE NODOS

Dos parámetros necesarios que son intrínsecos a la simulación y de cuyo valor depende la exactitud y tiempo de cómputo de los resultados, son los incrementos de tiempo y espacio.

En cuanto al paso espacial  $\Delta x$ , éste está directamente relacionado con el número de nodos. Supóngase un lecho de altura  $L$  que se discretiza en un número determinado de porciones de altura  $\Delta x$ , con ello el número de porciones viene dado por:

$$N^{\circ}_{\text{porciones}} = \frac{L}{\Delta x}, \text{ siendo en adimensional: } N^{\circ}_{\text{porciones adim.}} = \frac{1}{\Delta \hat{x}}$$

El número de nodos será igual al de porciones sumándole uno, pues se coloca un nodo en los extremos de cada porción para conseguir tener un nodo justo en la entrada del lecho y otro en la salida. Con ello se puede demostrar que el valor del paso espacial será:

$$\Delta \hat{x} = \frac{1}{n-1} \quad 4.14$$

donde  $n$  es el número de nodos totales. Por lo tanto el problema se centra en detectar el número de nodos necesarios para obtener una buena aproximación de la evolución de la temperatura a lo largo del lecho en la simulación del modelo con la realidad. Para ello lo que se va a hacer es un análisis de sensibilidad: obtener la temperatura en un punto fijo del lecho y en un instante concreto para diferente número de nodos. Llegará un momento en el que aunque se aumente el número de nodos, se alcanzará una precisión aceptable para la simulación y la temperatura en el punto no variará. Con ello queda fijado el número de nodos  $n$  y en consecuencia el incremento espacial  $\Delta x$  según ha quedado demostrado en la expresión 4.14.

### 4.2.2 CONVERGENCIA NUMÉRICA

Para la elección del paso temporal  $\Delta t$  hay que emplear algún tipo de criterio de estabilidad para garantizar que se emplea un cierto valor inferior a un límite que produciría resultados incorrectos, es decir, el intervalo de tiempo elegido debe ser inferior al tiempo en el cual transcurren las variaciones de temperatura en el lecho.

El criterio de estabilidad usado es el de Courant-Fiedrich-Levy (CFL), muy empleado en la solución de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales mediante ciertos algoritmos. Establece que la propagación de la información numérica debe ser al menos tan rápida como la de la información física. La condición CFL se expresa como sigue:

$$\Delta t \leq \frac{1}{u/\Delta x}$$

Haciendo uso de las variables adimensionales 3.3 y 3.4 que se definieron en el capítulo 3, la condición de CFL se puede adimensionalizar:

$$\frac{L}{u} \Delta \hat{t} \leq \frac{1}{u/\Delta \hat{x} L}$$

Y simplificando queda:

$$\boxed{\Delta \hat{t} \leq \Delta \hat{x}} \quad 4.15$$

Con lo que empleando la condición límite:  $\Delta \hat{t} = \Delta \hat{x}$ , se garantiza la convergencia.

Resumiendo se podría decir que la elección de los pasos espaciales y temporales necesarios para la simulación numérica del modelo se centra en fijar de la forma más acertada el número de nodos, pues de éste depende directamente el paso espacial, y para garantizar la convergencia, haciendo uso del criterio de CFL el paso temporal tiene que ser igual al espacial.

## **5. RESULTADOS Y COMPARACIÓN**

Una vez que las ecuaciones del modelo que explican el proceso de almacenamiento térmico de calor en un lecho fijo han sido acondicionadas para su resolución mediante diferencias finitas, se puede encontrar una solución y presentar la evolución temporal de la temperatura a lo largo del lecho haciendo uso del método matricial expuesto en el capítulo anterior. También se obtendrán otros datos de interés como son la eficiencia o el factor de almacenamiento del lecho todo ello para unas dimensiones del lecho de referencia. A continuación se procederá al estudio de los parámetros de operación, como son la altura del lecho y el caudal, es decir, como varía la distribución de temperaturas y la eficiencia del lecho fijo al variar la altura y el caudal de fluido introducido en el lecho. Por último se compararán los resultados obtenidos de la simulación del lecho con datos experimentales obtenidos en el departamento de Ingeniería Térmica y de Fluidos de la Universidad Carlos III de Madrid y que han sido facilitados por la tutora del proyecto para tal efecto. Para la obtención de estos datos y la resolución matricial del modelo se ha hecho uso como ya se dijo anteriormente del software matemático Matlab, en el cual se ha realizado toda la programación necesaria para la obtención de los resultados. Los programas creados para tal efecto se adjuntan en el apéndice A.

## 5.1 DEFINICIÓN Y CÁLCULO NUMÉRICO DE LOS PARÁMETROS DEL LECHO

En primer lugar se definirán todos los aspectos físicos y geométricos del lecho, las propiedades térmicas del sólido y el fluido, y se realizará el cálculo de los diferentes parámetros necesarios para la simulación numérica del lecho fijo como son el cálculo de las conductividades térmicas efectivas, de los coeficientes de transferencia de calor o del coeficiente global de transferencia de calor cuyas expresiones ya se desarrollaron y explicaron en el capítulo 3. Indicar que tanto la geometría como los materiales del lecho que se han empleado en la simulación son los mismos que los del lecho existente en el laboratorio del departamento de Ingeniería Térmica y de Fluidos y con el que posteriormente se comparará.

Los datos referentes a la geometría del lecho son los siguientes:

- Altura del lecho fijo:  $L = 0,2 \text{ m}$
- Diámetro del lecho fijo:  $D = 0,2 \text{ m}$
- Diámetro exterior del lecho:  $D_{\text{ext}} = 0,204 \text{ m}$
- Diámetro exterior de la capa aislante:  $D_{\text{iso}} = 0,234 \text{ m}$

El material de la tubería (diámetro interno  $D$  y externo  $D_{ext}$ ) que contiene las partículas sólidas del lecho y a través de la cual pasa el fluido es acero inoxidable AISI 304 y sus propiedades a 300°K [5] son:

- Densidad:  $\rho_w = 7900 \text{ kg/m}^3$
- Conductividad térmica:  $K_w = 14,9 \text{ W/m}\cdot\text{k}$
- Calor específico:  $c_{p_w} = 477 \text{ J/kg}\cdot\text{K}$

En cuanto al aislante, que se trata de revestimiento de fibra de vidrio (forro de tubo), sus propiedades a 300°K [5] son:

- Densidad:  $\rho_{iso} = 32 \text{ kg/m}^3$
- Conductividad térmica:  $K_{iso} = 0,038 \text{ W/m}\cdot\text{k}$
- Calor específico:  $c_{p_{iso}} = 835 \text{ J/kg}\cdot\text{K}$

El material del que están compuestas las partículas sólidas que forman el lecho empleado tanto en la simulación como en los experimentos es arena, cuyo empleo es típico en los lechos fijos. A continuación se muestran las características físicas y térmicas de la arena:

- Diámetro de las partículas:  $d_p = 0,6 \text{ mm}$
- Porosidad del lecho:  $\varepsilon = 0,4$
- Densidad:  $\rho_s = 2600 \text{ kg/m}^3$
- Conductividad térmica:  $K_s = 1,28 \text{ W/m}\cdot\text{k}$
- Calor específico:  $c_{p_s} = 920 \text{ J/kg}\cdot\text{K}$

En cuanto al fluido de entrada en el lecho se trata de aire, cuya temperatura constante para la carga será para todas las simulaciones de 65 °C, en el caso de la descarga se considerará una entrada de aire a temperatura ambiente de 24 °C. A continuación se muestran las características físicas y térmicas del aire:

- Densidad:  $\rho_a = 1,18 \text{ kg/m}^3$
- Conductividad térmica:  $K_a = 0,02624 \text{ W/m}\cdot\text{k}$
- Calor específico:  $c_{p_a} = 1012 \text{ J/kg}\cdot\text{K}$
- Viscosidad dinámica:  $\mu_a = 1,8462 \cdot 10^{-5} \text{ kg/m}\cdot\text{s}$

Inicialmente se supone que el lecho se encuentra a temperatura ambiente, y el caudal de aire de entrada empleado es de 485 l/min. Este caudal es el mismo que se

empleo en los experimentos del laboratorio e indicar que es inferior al caudal de mínima fluidización para el lecho indicado que corresponde a una velocidad del aire de entrada de 0,33m/s, es decir, 622 l/min.

A continuación se procede al cálculo de los coeficientes de transferencia de calor:

- Coeficiente transferencia calor entre partículas y fluido –  $h$ :

El valor de  $h$  acorde con la expresión 3.37 se calcula como sigue:

$$h = \frac{Nu K_a}{d_p}$$

a continuación se procede al cálculo del número de Nusselt según la expresión 3.34, para el que previamente se necesita el valor del número de Reynolds para las partículas y del número de Prandtl:

$$Re_d = \frac{U_s d_p}{\nu} = \frac{U_s d_p}{\mu_a / \rho_a}$$

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha} = \frac{\mu_a / \rho_a}{K_a / c_{pa} \rho_a} = \frac{\mu_a c_{pa}}{K_a}$$

El valor de la velocidad superficial  $U_s$  del fluido es la del flujo de aire expresado en m/s:

$$U_s = \frac{Q}{60 \cdot 1000 \cdot \text{area transversal}} = \frac{485}{60 \cdot 1000 \cdot \pi \cdot \left(\frac{0,2}{2}\right)^2} = 0,2573 \text{ m/s}$$

$$Re_d = \frac{0,2573 \cdot 0,0006}{1,8462 \cdot 10^{-5} / 1,18} = 9,8672$$

$$Pr = \frac{1,8462 \cdot 10^{-5} \cdot 1012}{0,02624} = 0,712$$

Con ello el número de Nusselt y el coeficiente de transferencia de calor por convección  $h$  queda:

$$Nu = 2.0 + 2.031 Re_d^{1/2} Pr^{1/3} + 0.049 Re_d Pr^{1/2}$$

$$Nu = 2.0 + 2.031 \cdot 9,8672^{1/2} \cdot 0,712^{1/3} + 0.049 \cdot 9,8672 \cdot 0,712^{1/2} = 8,104$$

$$h = \frac{Nu K_a}{d_p} = \frac{8,104 \cdot 0,02624}{0,0006} = \boxed{354,45 \text{ W/m}^2 \cdot \text{k}}$$

- Coeficiente transferencia calor entre paredes y fluido –  $h_w$ :

Para el cálculo del coeficiente de transferencia de calor entre las paredes y el fluido tan sólo hay que calcular el valor del número de Nusselt según la expresión 3.38, pues los valores para el número de Reynolds y Prandtl no cambian con respecto al anterior coeficiente  $h$ :

$$Nu = 2,576 Re_d^{1/3} Pr^{1/3} + 0,0936 Re_d^{0,8} Pr^{0,4}$$

$$Nu = 2,576 \cdot 9,8672^{1/3} 0,712^{1/3} + 0,0936 \cdot 9,8672^{0,8} 0,712^{0,4} = 5,4438$$

$$h_w = \frac{Nu K_a}{d_p} = \frac{5,44438 \cdot 0,02624}{0,0006} = \boxed{238,07 \text{ W/m}^2 \cdot \text{k}}$$

- Coeficiente transferencia calor entre lecho y ambiente –  $h_{iso}$ :

El valor del número de Nusselt para el cálculo del coeficiente  $h_{iso}$  viene dado por la expresión 3.39 para la cual había falta calcular el valor de los números de Prandtl y Rayleigh. Esta expresión se empleaba para placas verticales sometidas a flujos externos de convección libre, era válida si  $Ra_L \leq 10^9$  y además se podía aplicar a cilindros verticales si se cumplía la siguiente condición 3.42:

$$\frac{D}{L} \geq \frac{35}{Gr_L^{1/4}}$$

Se va a calcular en primer lugar el valor del número de Grashof ( $Gr$ ) para comprobar que la expresión se puede aplicar, para lo que se va a suponer un salto de temperatura de 5°C entre la superficie del aislante y el ambiente:

$$Gr_L = \frac{g \beta (T_s - T_\infty) L^3}{\nu^2} = \frac{9,81 \cdot \frac{1}{24} \cdot 5 \cdot 0,2^3}{(1,8462 \cdot 10^{-5} / 1,18)^2} = 6,6793 \cdot 10^7$$

$$\frac{D}{L} \geq \frac{35}{Gr_L^{1/4}} \rightarrow \frac{0,2}{0,2} = 1 > \frac{35}{Gr_L^{1/4}} = \frac{35}{6,6793 \cdot 10^7}$$

La condición 3.42 se cumple, y por lo tanto se puede aplicar a nuestra geometría. A continuación se calcula el valor del número de Rayleigh para comprobar si es menor que  $10^9$ :

$$Ra_L = Gr_L Pr = 6,6793 \cdot 10^7 \cdot 0,712 = 4,755 \cdot 10^7$$

Por lo tanto ya se puede calcular el valor del Nusselt y posteriormente el de  $h_{iso}$ :

$$Nu_L = 0,68 + \frac{0,67 Ra_L^{1/4}}{[1 + (0,492/Pr)^{9/16}]^{4/9}} = 0,68 + \frac{0,67 \cdot (4,755 \cdot 10^7)^{1/4}}{[1 + (0,492/0,712)^{9/16}]^{4/9}} = 47,1025$$

$$h_{iso} = \frac{Nu K_a}{L} = \frac{47,1025 \cdot 0,02624}{0,2} = \boxed{6,179 \text{ W/m}^2 \cdot \text{k}}$$

Una vez obtenidos los valores de todos los coeficientes de transferencia de calor por convección existentes en el modelo para la geometría a estudio, se procede al cálculo de las conductividades térmicas efectivas para el sólido y el aire:

- Conductividad térmica efectiva del aire  $K_{a,x}$ :

La expresión 3.44 permitía calcular el valor de  $K_{a,x}$  y tenía dos valores en función del número de Reynolds para las partículas, si era mayor que 0,8 o menor o igual que este valor. El valor del número de Reynolds ya se calculó mas arriba y tenía el valor de 9,8672, con lo que el valor de la conductividad térmica efectiva del fluido viene dado por la siguiente expresión:

$$K_{a,x} = \frac{0,5 Pr Re_d K_a}{\varepsilon} = \frac{0,5 \cdot 0,712 \cdot 9,8672 \cdot 0,02624}{0,4} = \boxed{0,2304 \text{ W/m} \cdot \text{k}}$$

- Conductividad térmica efectiva de la arena  $K_{s,x}$ :

La conductividad térmica efectiva del sólido, en este caso para la arena, viene dada por la expresión 3.45, depende del valor de la conductividad térmica del fluido y de la conductividad térmica efectiva estática que se calcula a continuación:



$$K_e^0 = K_a \left( \frac{K_s}{K_a} \right)^m, \text{ donde } m = 0,28 - 0,757 \log \varepsilon - 0,057 \log \left( \frac{K_s}{K_a} \right)$$

$$m = 0,28 - 0,757 \log(0,4) - 0,057 \log \left( \frac{1,28}{0,02624} \right) = 0,485$$

$$K_e^0 = 0,02624 \left( \frac{1,28}{0,02624} \right)^{0,485} = 0,1729$$

Con ello se puede calcular el valor de  $K_{s,x}$ :

$$K_{s,x} = \frac{K_e^0 + 0,5 Pr Re_p K_s - \varepsilon K_{a,x}}{1 - \varepsilon} = \frac{0,1729 + 0,5 \cdot 0,712 \cdot 9,8672 \cdot 1,28 - 0,4 \cdot 0,2304}{1 - 0,4} =$$

$$= \boxed{7,6286 \text{ W/m} \cdot \text{k}}$$

En último lugar queda el cálculo del coeficiente global de transferencia de calor del lecho fijo para poder comenzar a presentar los resultados obtenidos de las simulaciones:

- Coeficiente global de transferencia de calor  $U$ :

El coeficiente  $U$  se calcula según la expresión 3.47 desarrollada en el capítulo 3:

$$U = \frac{1}{R_{t,t} \cdot \text{Área}} = \frac{1}{\frac{1}{h_w} + \frac{D}{2K_w} \ln\left(\frac{D_{ext}}{D}\right) + \frac{D}{2K_{iso}} \ln\left(\frac{D_{iso}}{D_{ext}}\right) + \frac{D}{h_{iso} D_{iso}}}$$

Donde todos los parámetros son conocidos:

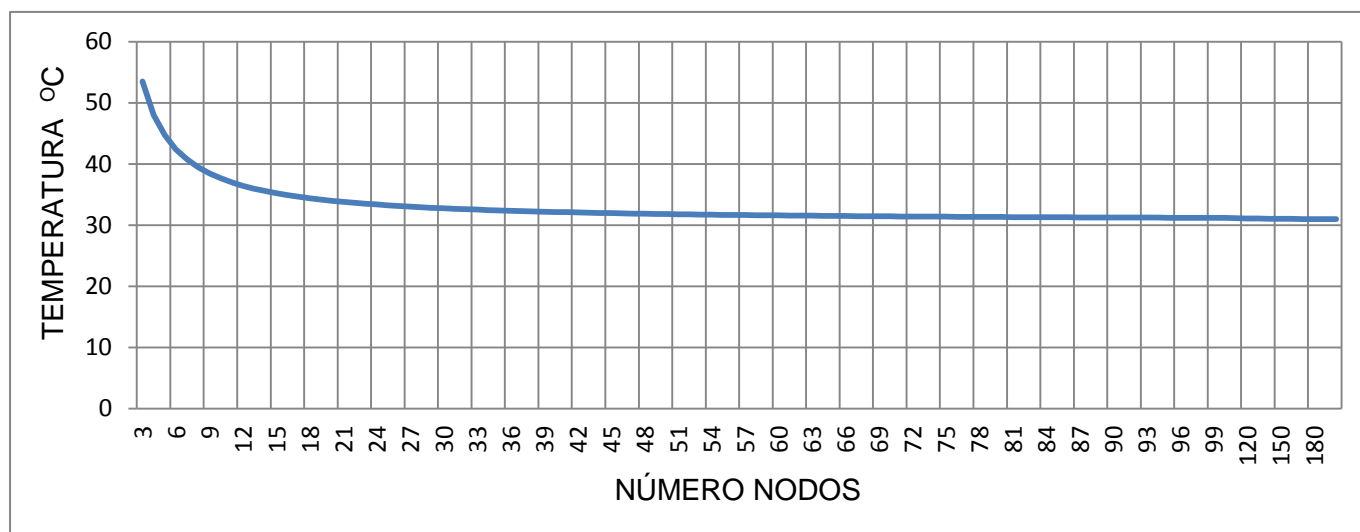
$$U = \frac{1}{\frac{1}{238,07} + \frac{0,2}{2 \cdot 14,9} \ln\left(\frac{0,204}{0,2}\right) + \frac{0,2}{2 \cdot 0,038} \ln\left(\frac{0,234}{0,204}\right) + \frac{0,2}{6,179 \cdot 0,234}} = \boxed{1,9853 \text{ W/m}^2 \cdot \text{k}}$$

Ya se tienen todos los parámetros definidos y calculados para el lecho fijo de referencia así como todos los datos referentes a la geometría del mismo. A continuación se pueden presentar los resultados obtenidos de las simulaciones del lecho mediante la programación en Matlab.

## 5.2 RESULTADOS

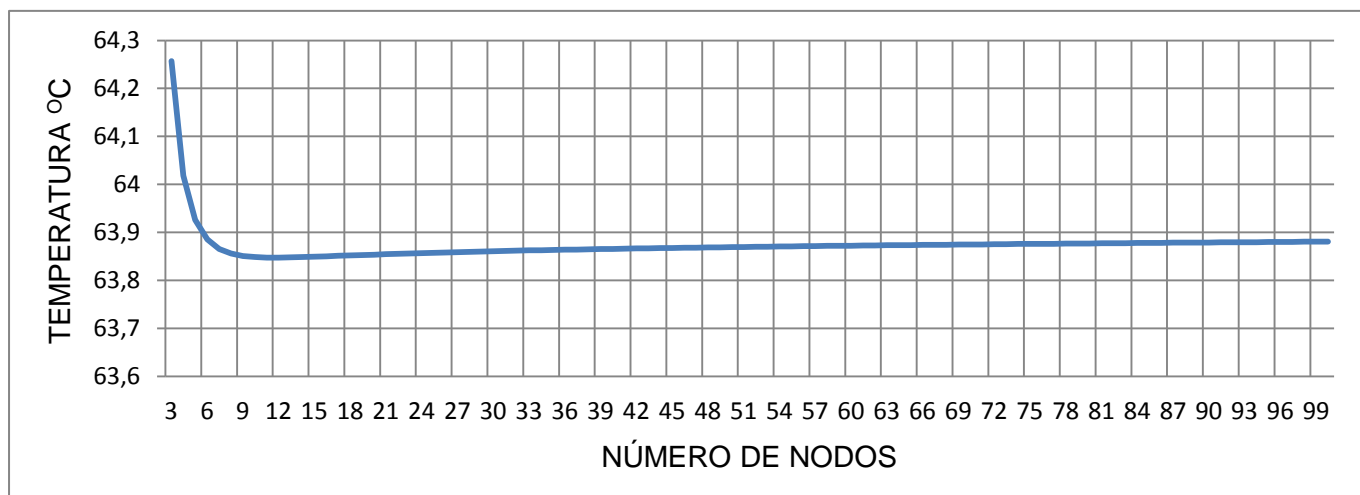
En primer lugar se ha de calcular el número de nodos mínimo que permite una buena simulación de la evolución de la temperatura a lo largo del lecho. Como se comentó en el capítulo anterior, se ha creado una función en Matlab mediante la cual se realiza un análisis de sensibilidad. Con todos los parámetros del lecho definidos, se puede obtener la temperatura en un punto concreto, para el caso de estudio es a la salida del lecho; y en un instante concreto de la simulación. Se van a representar los datos de temperatura al comienzo del proceso de carga, a los 10 minutos cuando se encuentra en el transitorio almacenando energía, y seguidamente a los 40 minutos cuando se supone que el lecho ya va alcanzando la temperatura consigna de 65°C. Un instante de tiempo inferior a 10 minutos muestra datos poco útiles, y superior a los 40 minutos ya se habría alcanzado la temperatura de entrada. Seguidamente se va aumentando progresivamente el número de nodos y obteniendo la temperatura en el último nodo para ambas situaciones, en el transitorio y en régimen permanente. La elección del número de nodos a emplear para la obtención de los resultados definitivos se realizará tratando de alcanzar un compromiso entre los resultados obtenidos para ambos instantes de tiempo junto con el coste de cómputo, pues a mayor número de nodos, las matrices son de mayor tamaño y el tiempo de cómputo aumenta.

A continuación se representan en una gráfica temperatura dimensional (°C) en el nodo situado a la salida del lecho a los 10 minutos del comienzo del proceso de carga del lecho, frente al número de nodos:



**Fig. 5.1.** *Análisis sensibilidad:  $x = L$  y  $t = 10$  min*

Seguidamente se muestra la evolución de la temperatura en el último nodo del lecho con el número de nodos a los 40 minutos del comienzo del proceso de carga:



**Fig. 5.2.** *Análisis sensibilidad:  $x = L$  y  $t = 40 \text{ min}$*

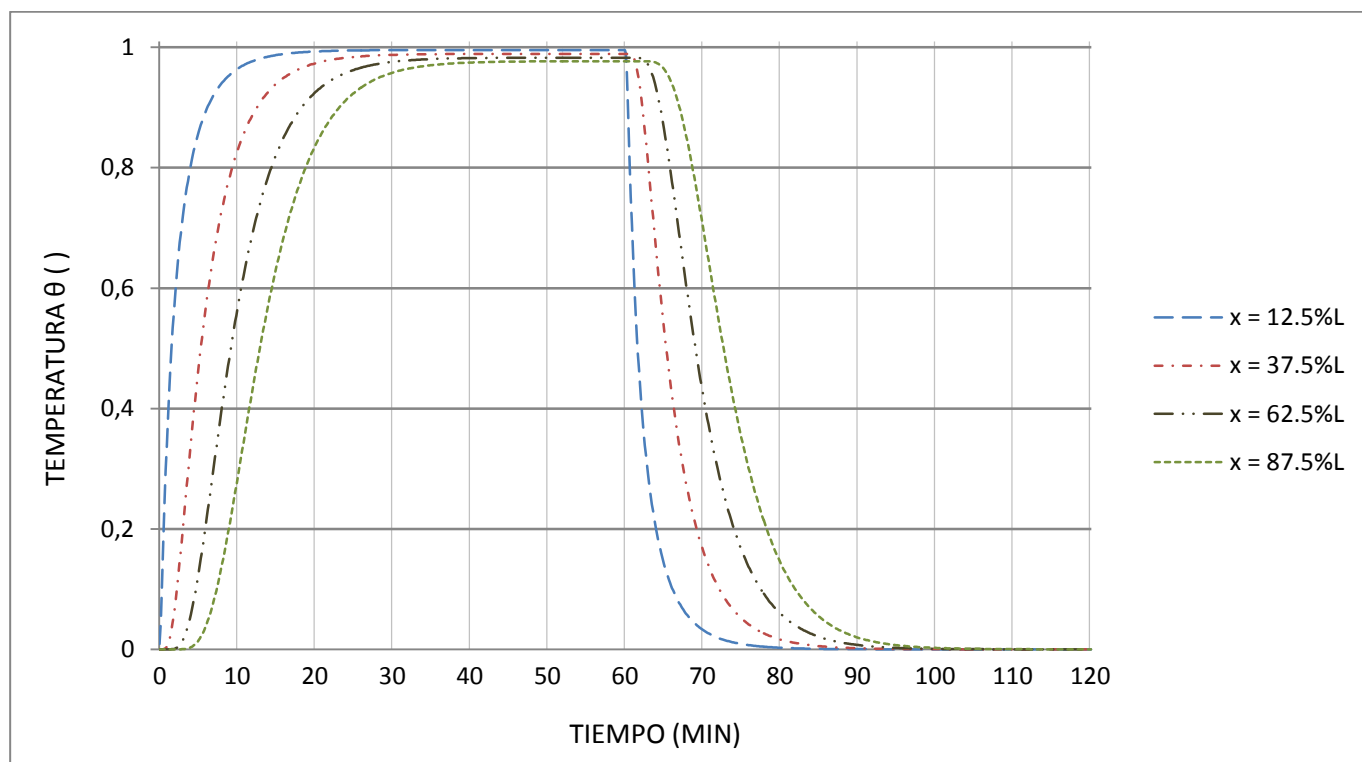
Como era de esperar, para el segundo de los casos se necesita un menor número de nodos, pues a partir de los 10 nodos la simulación muestra unas variaciones de temperatura muy pequeñas. Se puede observar el gráfico como las temperaturas oscilan en torno a 63,8°C y 63,9°C. Para el transitorio, cuando está comenzando la carga del lecho, la sensibilidad sin embargo es superior pues hay mayores variaciones de la temperatura. Se puede observar como para 10 nodos, la temperatura según la simulación en el último nodo del lecho es de 37,6 °C; sin embargo, la mayor resolución conseguida para este análisis de sensibilidad ha sido con 200 nodos, arrojando una temperatura de 31 °C aproximadamente al final del lecho, es decir, se tiene un error de casi 7 °C. Como se dijo en el capítulo 4 para garantizar la convergencia, el paso temporal debe ser igual al espacial, si se elige un número de nodos elevado, el paso espacial disminuye, con él lo hace el temporal y se obtendrían unas matrices poco manejables.

Llegando a un compromiso entre ambos resultados y asumiendo que los mayores errores en la simulación se obtendrán en los instantes iniciales de la simulación, el número de nodos elegido para la simulación es de 40 nodos.

Una vez elegido el número de nodos, se puede mostrar la evolución temporal de la temperatura en el lecho de dimensiones y propiedades ya citadas al comienzo del presente capítulo. Para ello remarcar que la simulación se ha realizado teniendo en cuenta que el lecho se encuentra inicialmente a temperatura ambiente y con los siguientes parámetros de simulación:

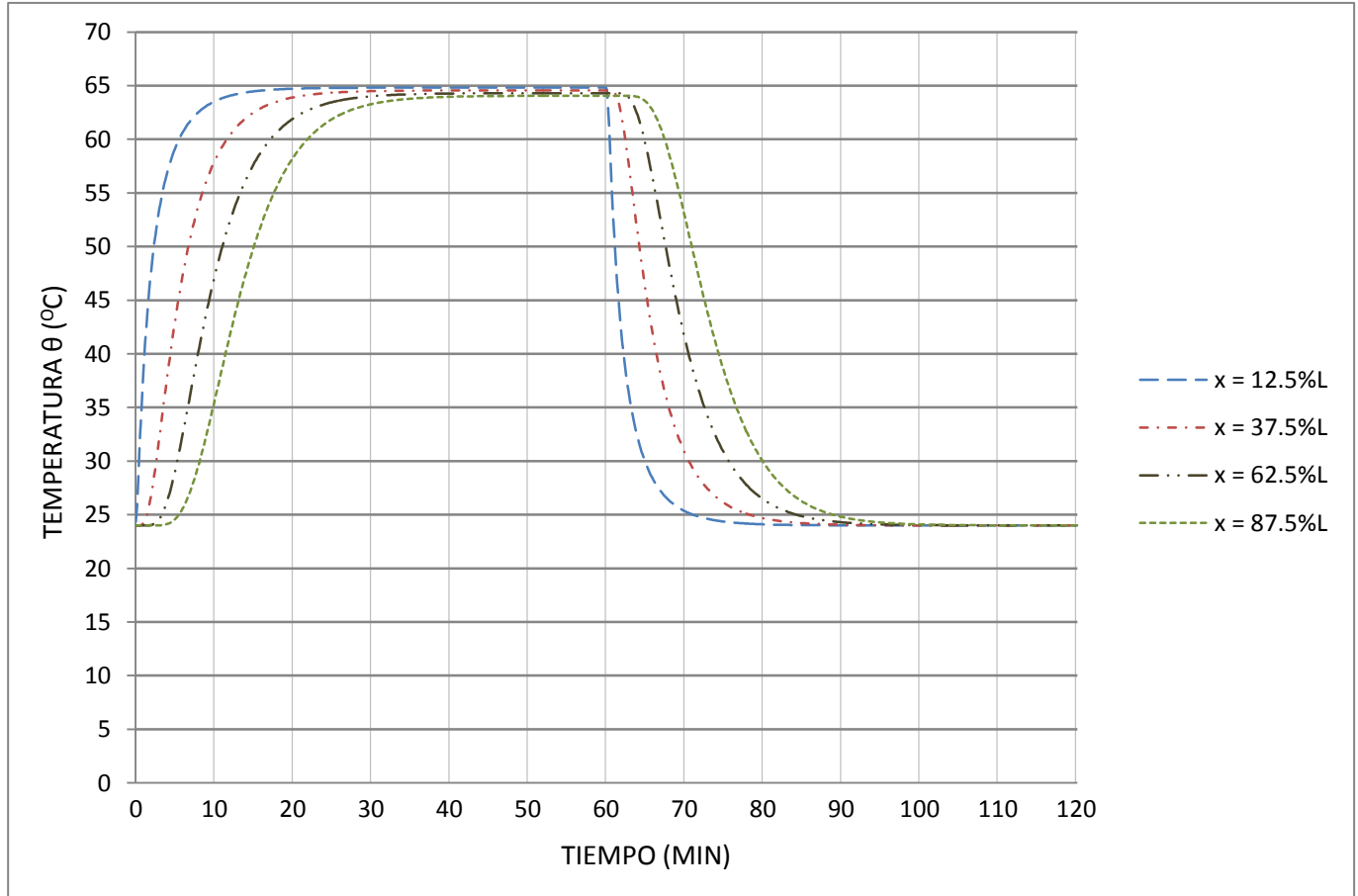
Tiempo proceso de carga	60 minutos
Tiempo proceso de descarga	60 minutos
Caudal de aire entrada (Q)	485 l/min
Temperatura aire entrada carga ( $T_{max}$ )	65 °C
Temperatura ambiente ( $T_0$ )	24 °C

En primer lugar se muestra la evolución temporal y adimensional de la temperatura en cuatro alturas del lecho situadas a 12,5%, 37,5%, 62,5% y 87,5% de la altura del lecho, datos que corresponden a las siguientes alturas respectivamente: 2.5 cm, 7.5 cm, 12.5 cm y 17.5 cm:



**Fig. 5.3.** Evolución adimensional de la temperatura del lecho durante la carga y descarga para  $Q = 485$  l/min y  $L = 0.2$  m

Seguidamente se puede mostrar la evolución dimensional en °C de la temperatura para los mismos puntos:



**Fig. 5.4.** Evolución dimensional de la temperatura del lecho durante la carga y descarga para  $Q = 485$  l/min y  $L = 0.2$  m

Como se puede observar en la figura 5.4, todas las gráficas parten de la temperatura ambiente 24 °C en el instante inicial cuando comienza el proceso de carga, transcurre un cierto tiempo en el que el lecho sigue almacenando energía térmica hasta que se acerca a la temperatura consigna de 65°C. El nodo situado a una altura de 2.5 cm ( $x=12.5\%L$ ) alcanza en menor tiempo el régimen permanente como es lógico, pues de los cuatro nodos representados es el más inferior, a medida que aumenta la altura en el lecho se requiere un mayor tiempo para alcanzar el régimen permanente.

Cuando finaliza el proceso de carga a los 60 minutos, comienza la descarga del lecho simulando que se introduce aire a temperatura ambiente de 24 °C, como ya se explicó en el capítulo 4 se consigue cambiando la condición de contorno del fluido, para ello se cambia el primer elemento del vector  $[B]$ , en el caso de la carga valdría 1:

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{T_{in}-T_0}{T_{max}-T_0} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{65-24}{65-24} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Y para la descarga 0, pues:  $T_{in} = T_0$ .

De nuevo el primer nodo representado es el que menos tarda en alcanzar la temperatura ambiente en el proceso de descarga.

### 5.3 ESTUDIO DE LOS PARÁMETROS DE OPERACIÓN

Seguidamente se va analizar como influye en el almacenamiento de energía térmica en el lecho la variación tanto de la altura del lecho como del caudal de aire introducido. La altura del lecho se variará en el rango de 0.5 y 2 veces respecto a las dimensiones de referencia definidas, y el caudal de aire entre 300 l/min y 600 l/min, siempre por debajo del caudal de mínima fluidización

Este estudio se complementará junto con el apartado 5.4 donde se detalla el cálculo de la eficiencia y del factor de almacenamiento del lecho simulado y se analizará la influencia que existe en estos parámetros la variación de la altura y el caudal manteniendo el resto de datos constantes.

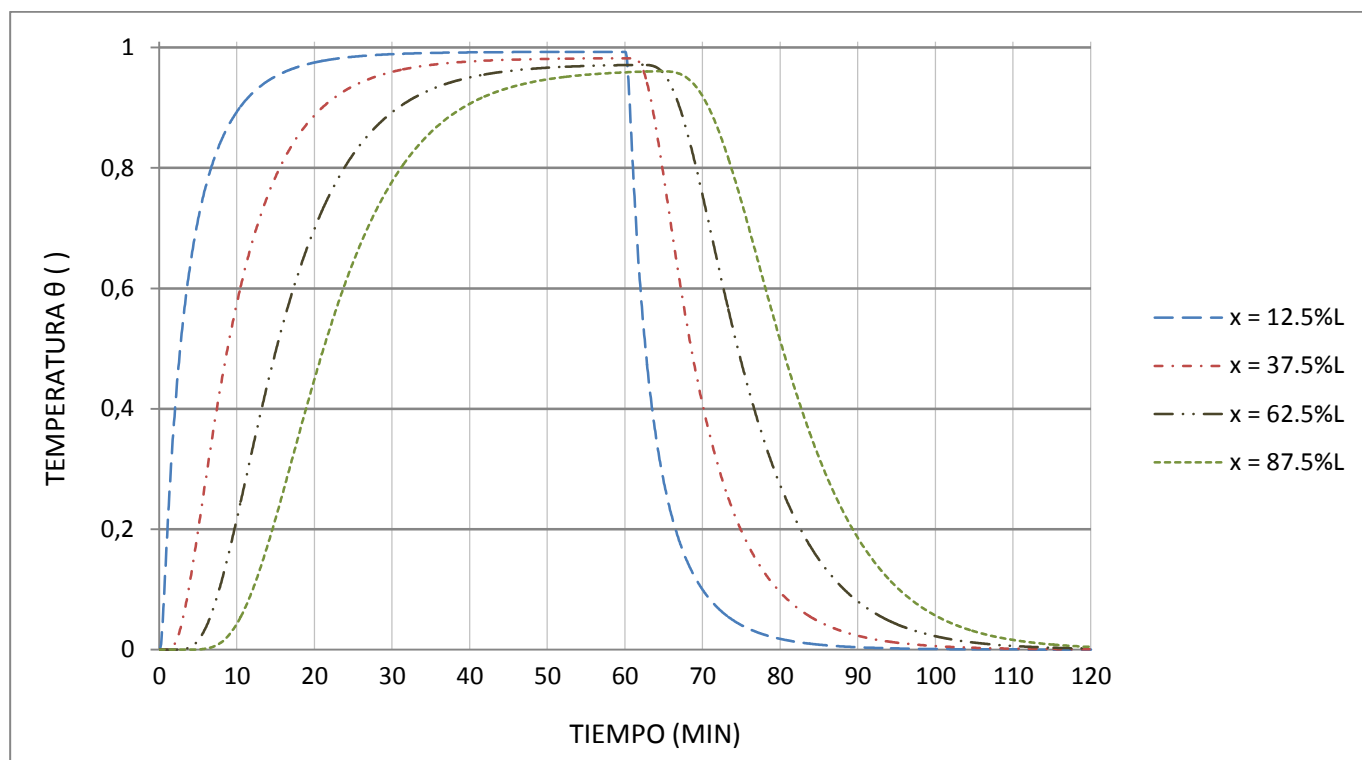
#### 5.3.1 CAUDAL DE AIRE

Los flujos de aire empleados para las diferentes simulaciones tomarán los siguientes valores: 300 l/min, 350 l/min, 400 l/min, 500 l/min, 550 l/min y 600 l/min, manteniendo para todos ellos la altura del lecho de 0.2 m y el resto de parámetros, a excepción de aquellos dependientes del flujo como son los coeficientes de transferencia de calor  $h$ ,  $h_w$  y las conductividades térmicas efectivas. Ambos dependen del valor del número de Reynolds y este a su vez del valor de la velocidad superficial  $U_s$  del fluido que cambia al variar el caudal de aire para una misma área. También cambia el coeficiente global de transferencia de calor  $U$ . Los valores de estos parámetros se detallan a continuación:

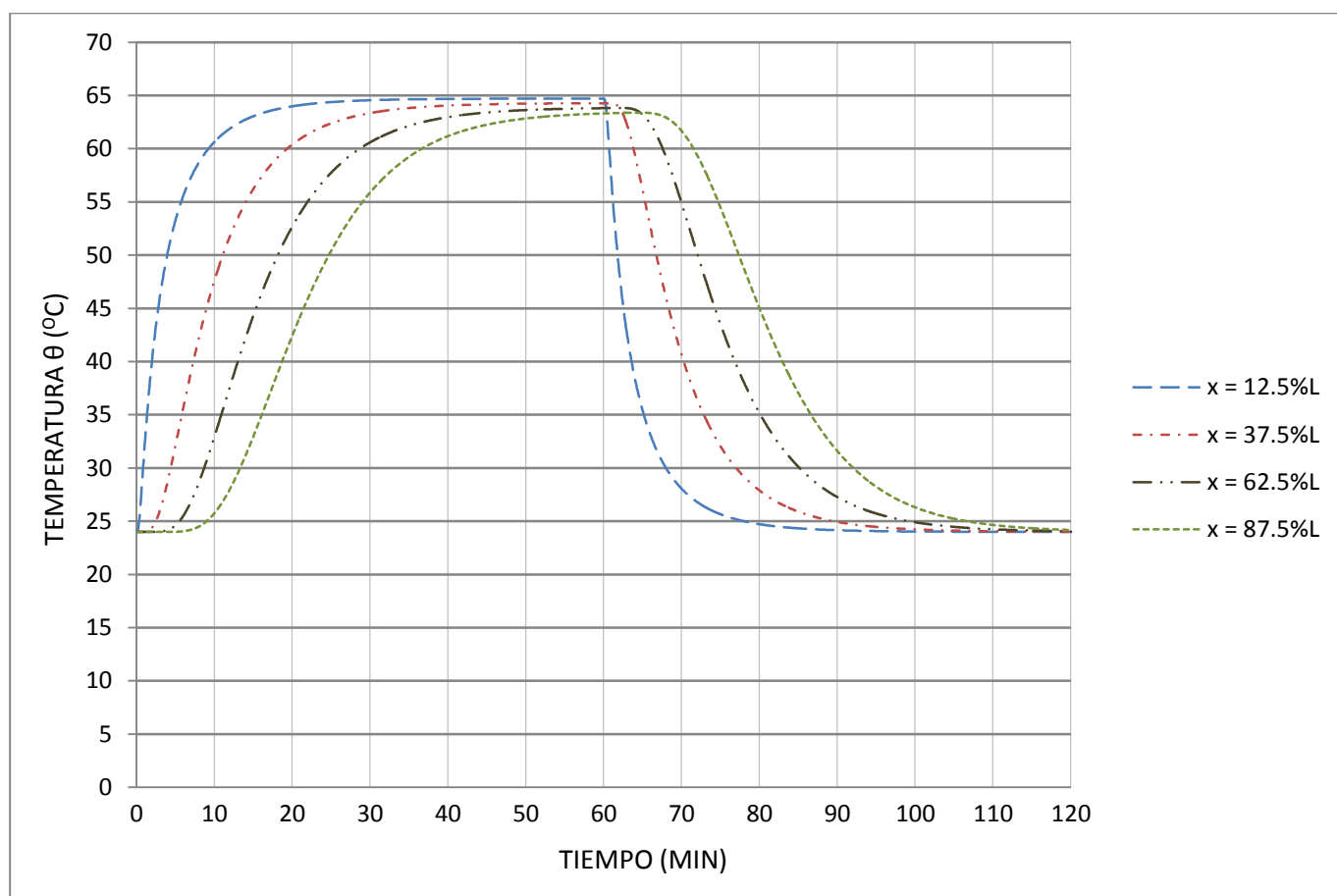
CAUDAL (l/min)	$h$ (W/m <sup>2</sup> ·k)	$h_w$ (W/m <sup>2</sup> ·k)	$K_{a,x}$ (W/m·k)	$K_{s,x}$ (W/m·k)	$U$ (W/m <sup>2</sup> ·k)
300	294,45	199,03	0,1425	4,828	1,982
350	312	210,72	0,166	5,585	1,9831
400	328,44	221,46	0,190	6,342	1,984
500	358,82	240,82	0,2375	7,855	1,9855
550	373,01	249,67	0,2613	8,612	1,9861
600	386,65	258,07	0,285	9,369	1,9866

**Tabla 5.1.** *Propiedades dependientes del caudal de aire*

A continuación se muestran los resultados que arroja la simulación para un caudal de 300 l/min; de nuevo se mostrará la evolución dimensional y adimensional de la temperatura en el lecho a lo largo del tiempo para cuatro puntos situados en la misma situación que en el caso de referencia del punto 5.2: 2.5 cm, 7.5 cm, 12.5 cm y 17.5 cm.



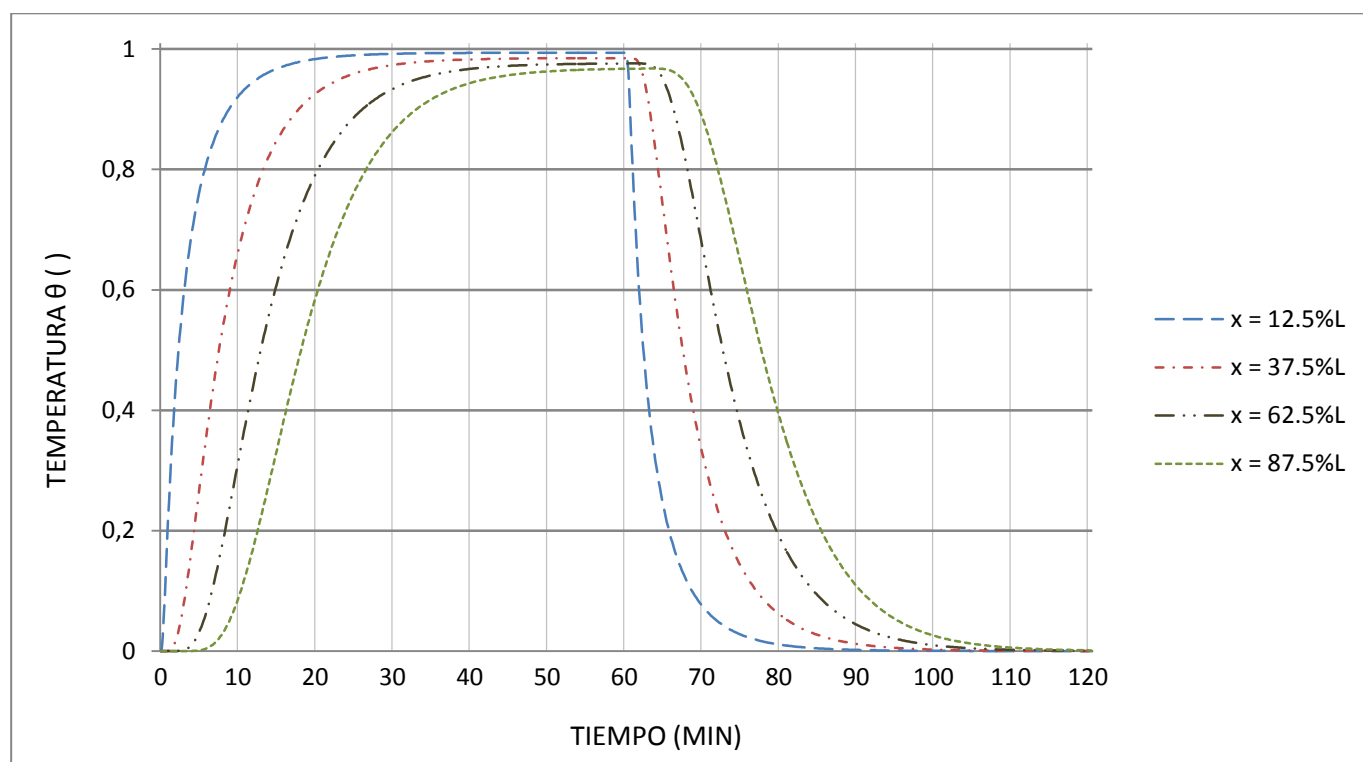
**Fig. 5.5.** *Evolución adimensional de la temperatura del lecho durante la carga y descarga para  $Q = 300$  l/min y  $L = 0.2$  m*



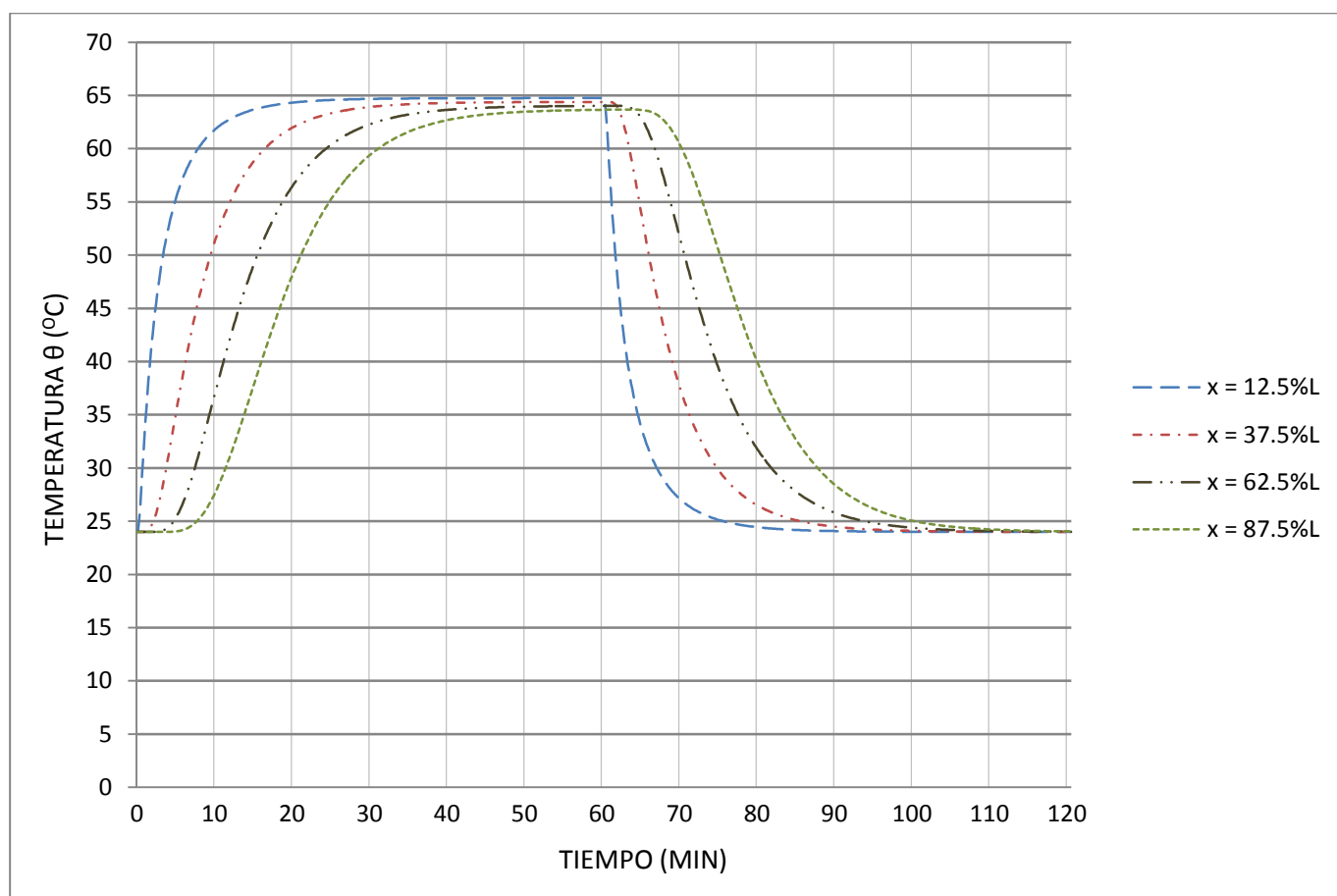
**Fig. 5.6.** Evolución dimensional de la temperatura del lecho durante la carga y descarga para  $Q = 300 \text{ l/min}$  y  $L = 0.2 \text{ m}$



Para un caudal de aire de 350 l/min:

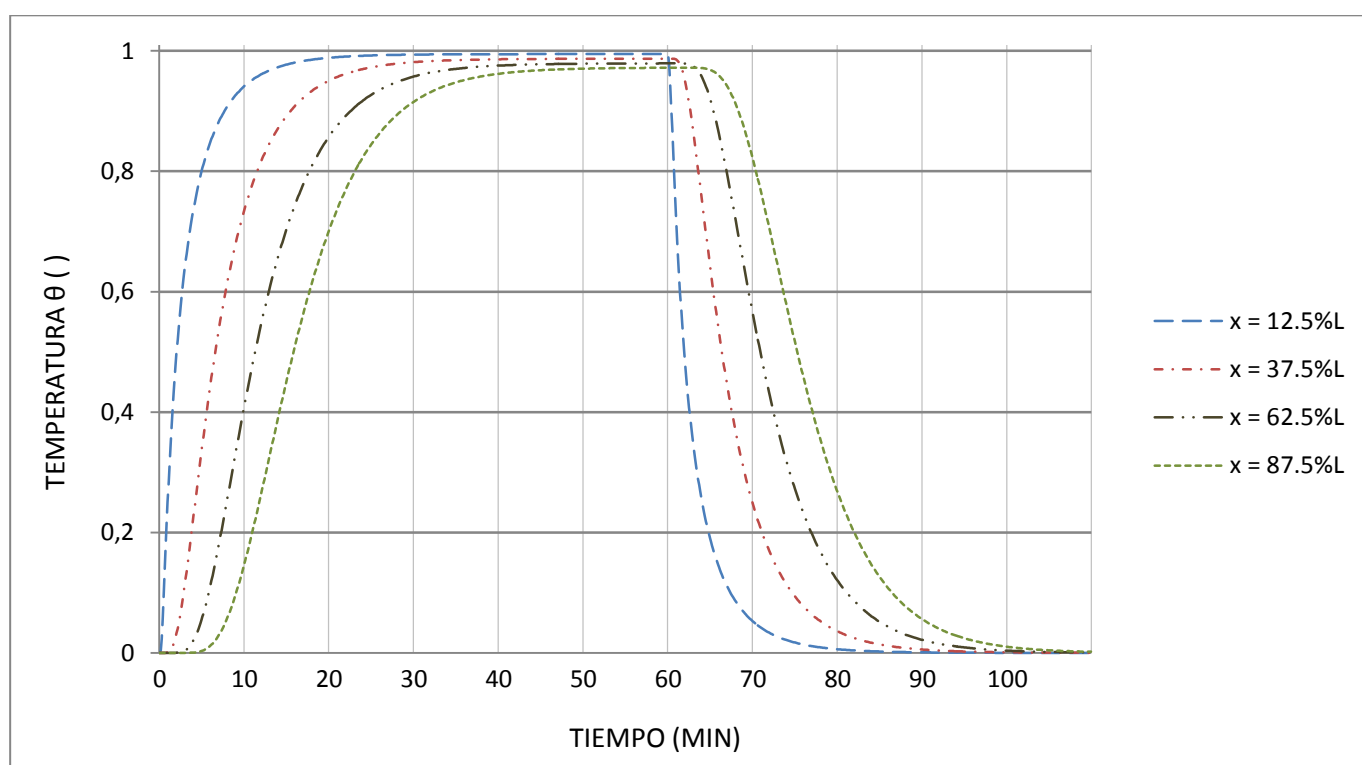


**Fig. 5.7.** Evolución adimensional de la temperatura del lecho durante la carga y descarga para  $Q = 350$  l/min y  $L = 0.2$  m

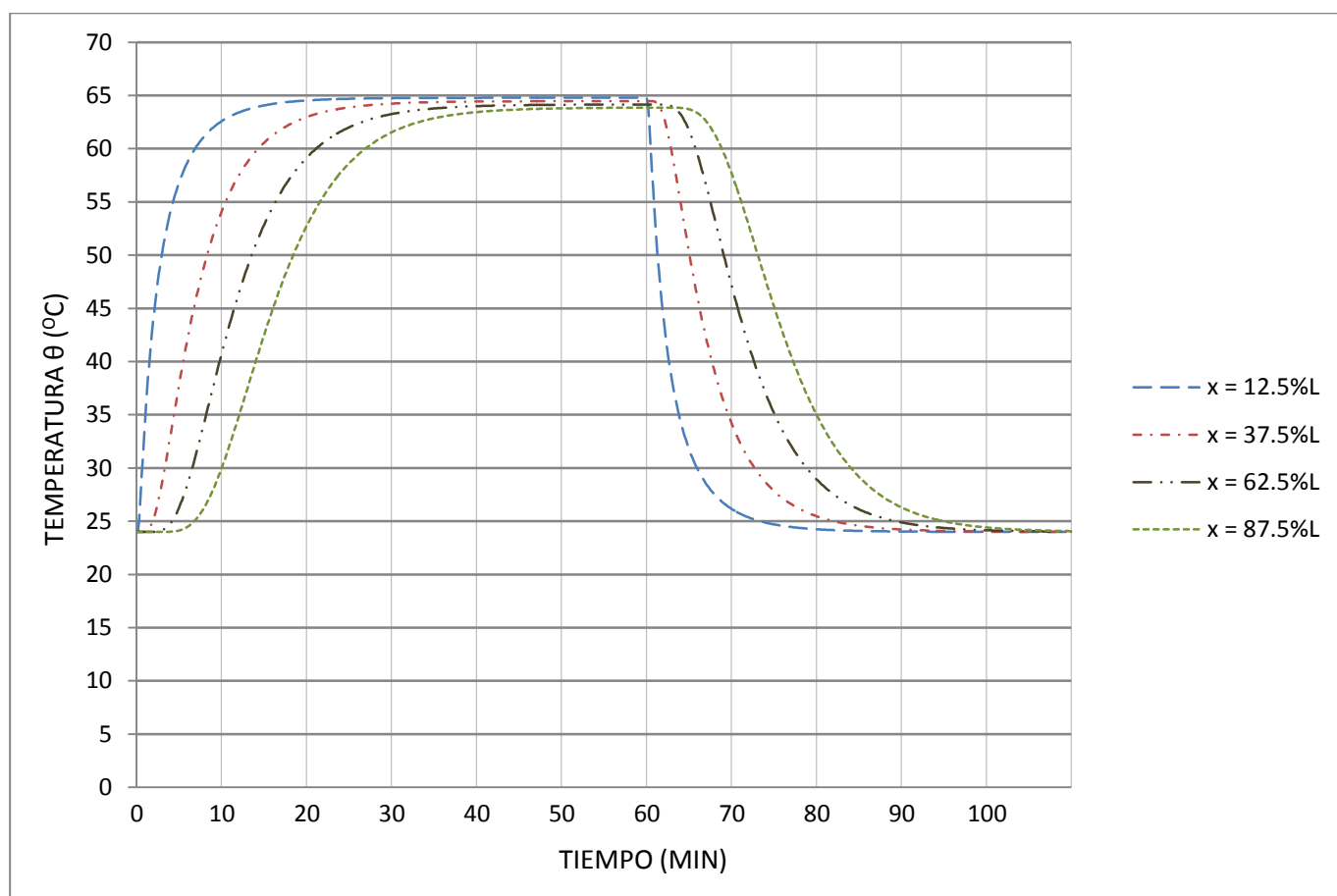


**Fig. 5.8.** Evolución dimensional de la temperatura del lecho durante la carga y descarga para  $Q = 350$  l/min y  $L = 0.2$  m

A continuación se muestran los gráficos referentes a un caudal de 400 l/min:

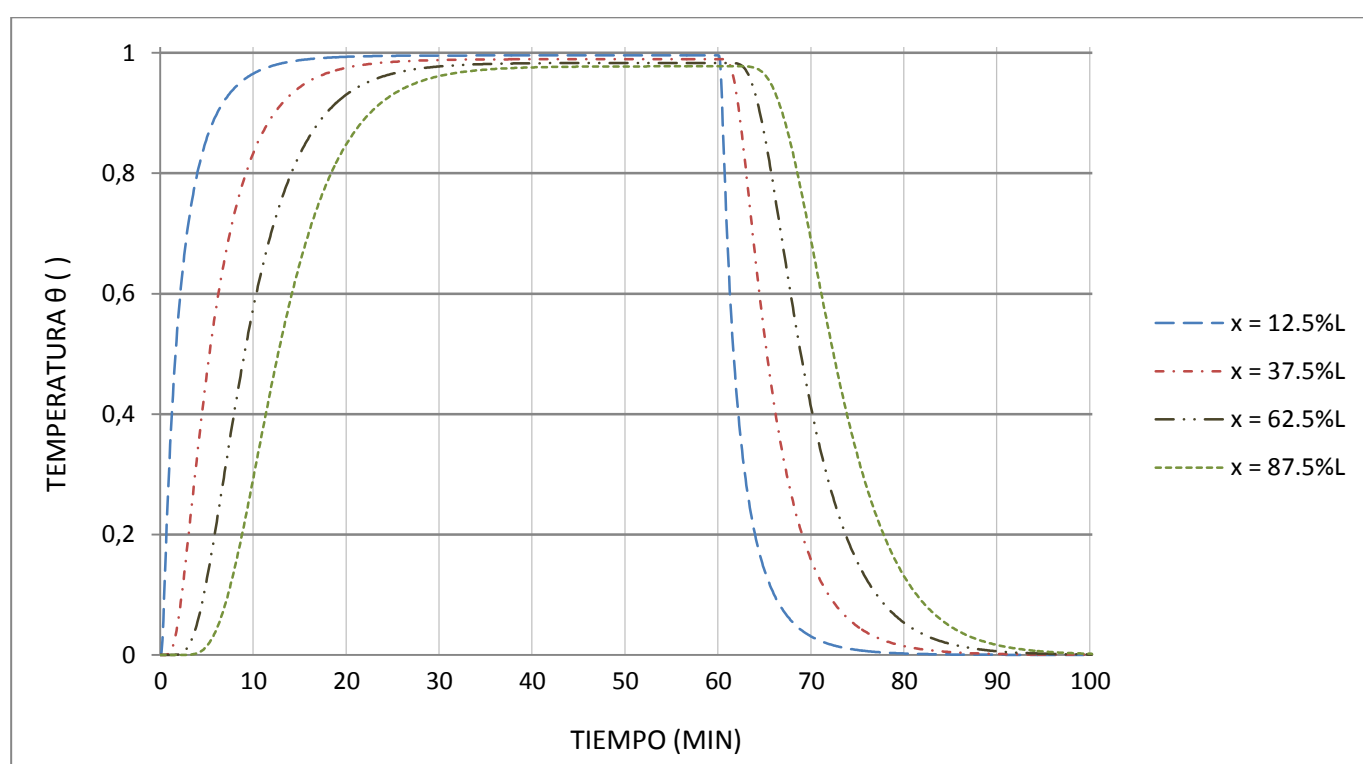


**Fig. 5.9.** Evolución adimensional de la temperatura del lecho durante la carga y descarga para  $Q = 400$  l/min y  $L = 0.2$  m

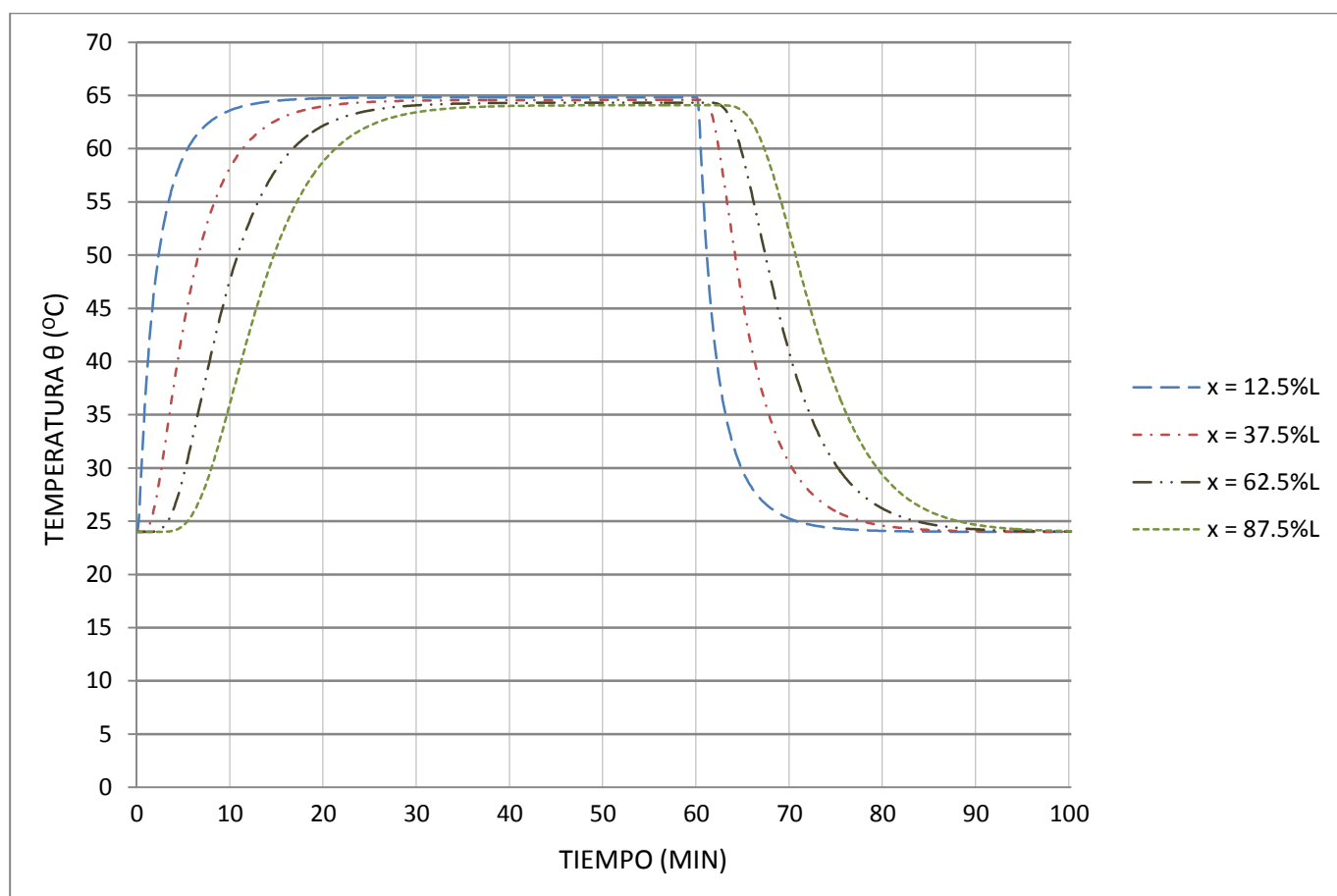


**Fig. 5.10.** Evolución dimensional de la temperatura del lecho durante la carga y descarga para  $Q = 400$  l/min y  $L = 0.2$  m

Para un caudal de 500 l/min los resultados obtenidos son los siguientes:

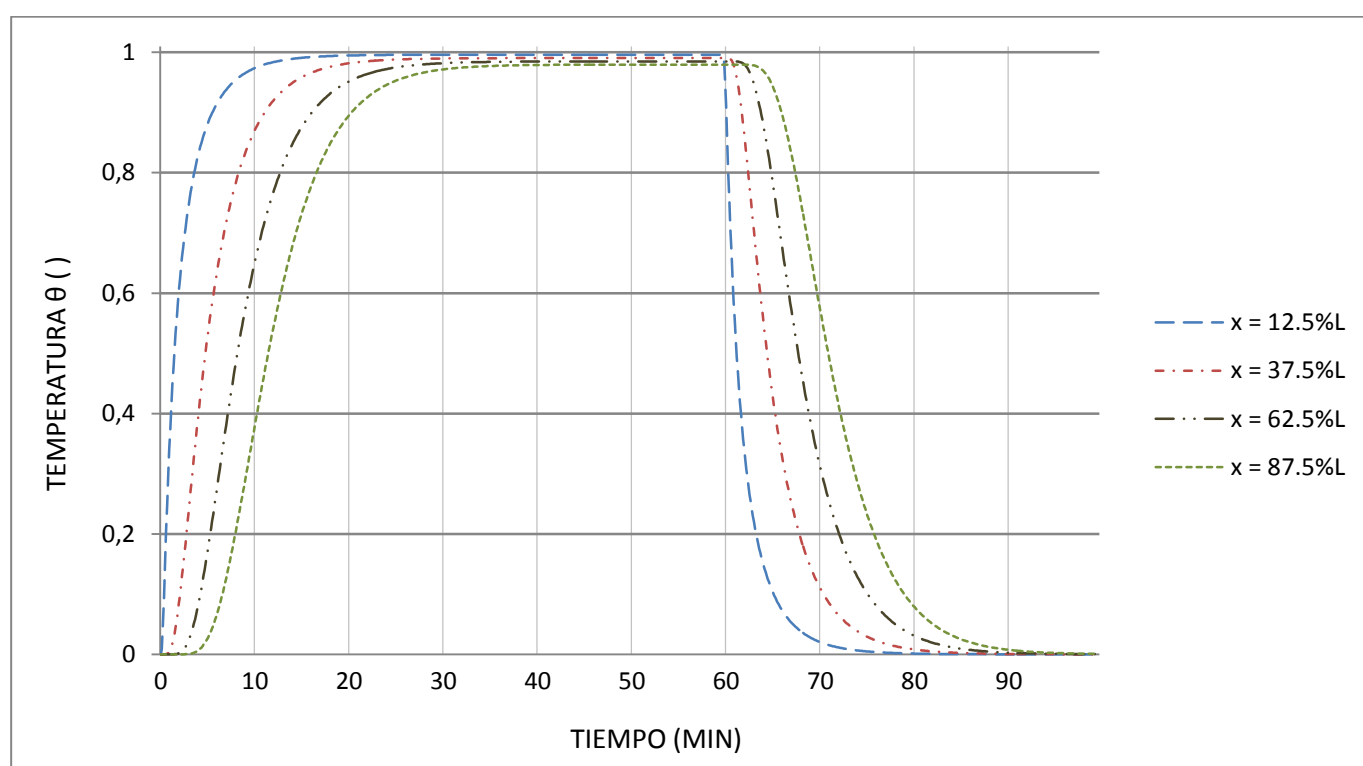


**Fig. 5.11.** Evolución adimensional de la temperatura del lecho durante la carga y descarga para  $Q = 500$  l/min y  $L = 0.2$  m

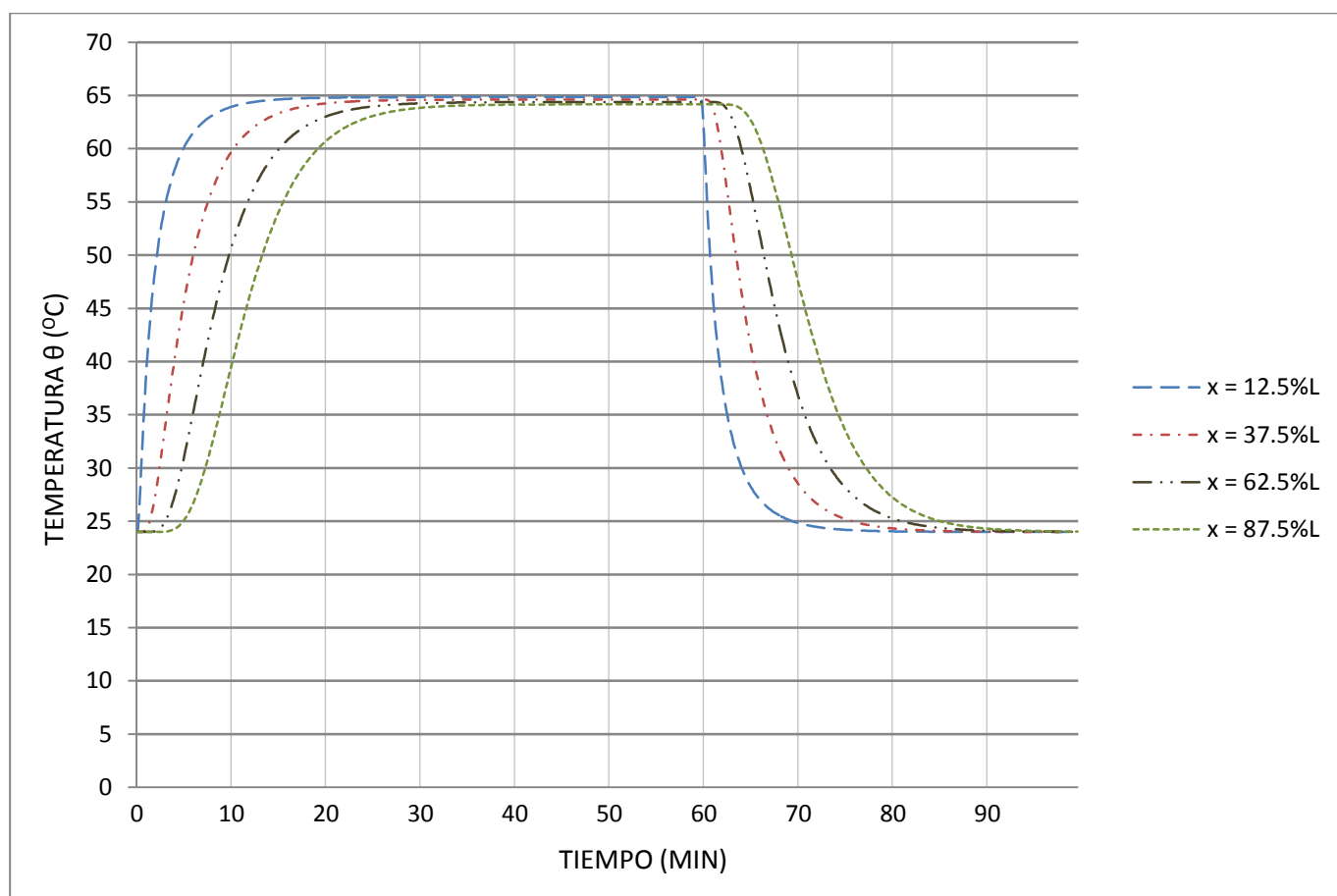


**Fig. 5.12.** Evolución dimensional de la temperatura del lecho durante la carga y descarga para  $Q = 500$  l/min y  $L = 0.2$  m

Los resultados para un caudal de 550 l/min son:



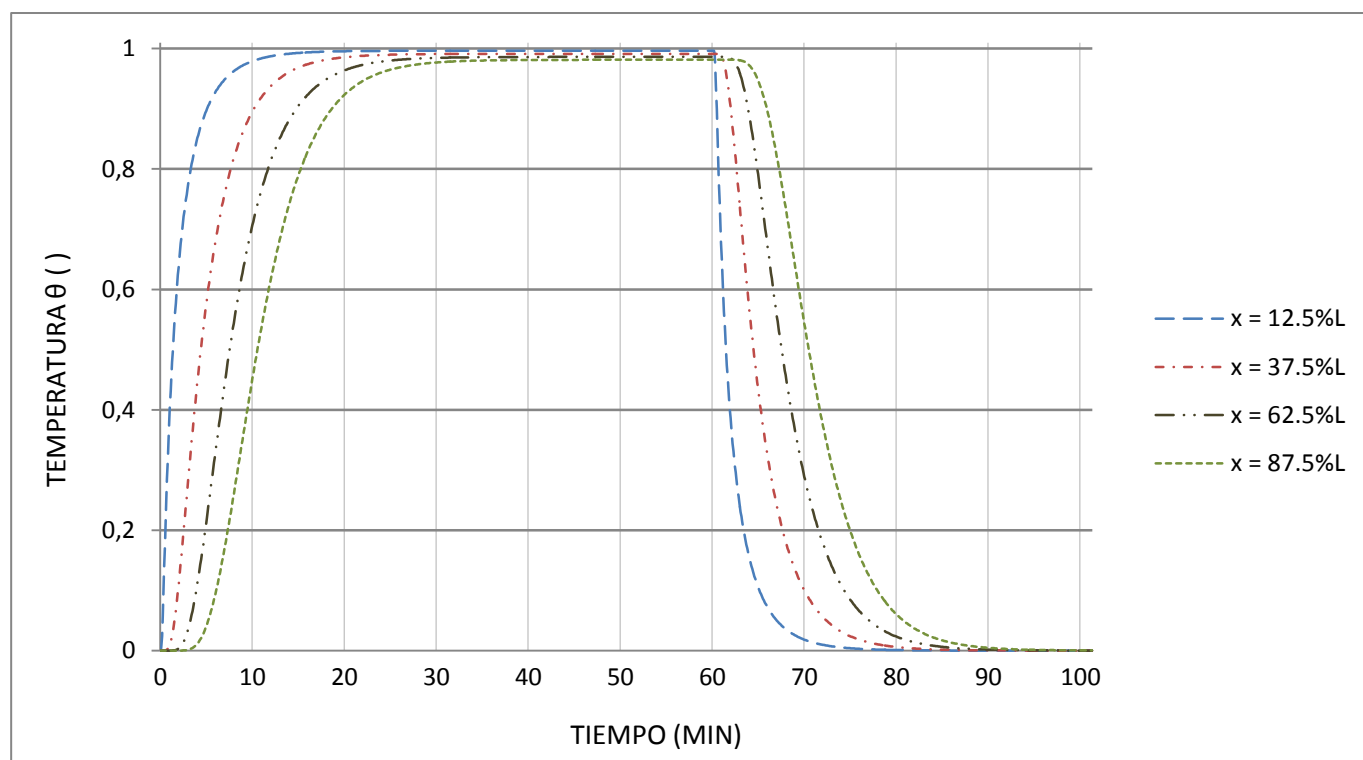
**Fig. 5.13.** Evolución adimensional de la temperatura del lecho durante la carga y descarga para  $Q = 550$  l/min y  $L = 0.2$  m



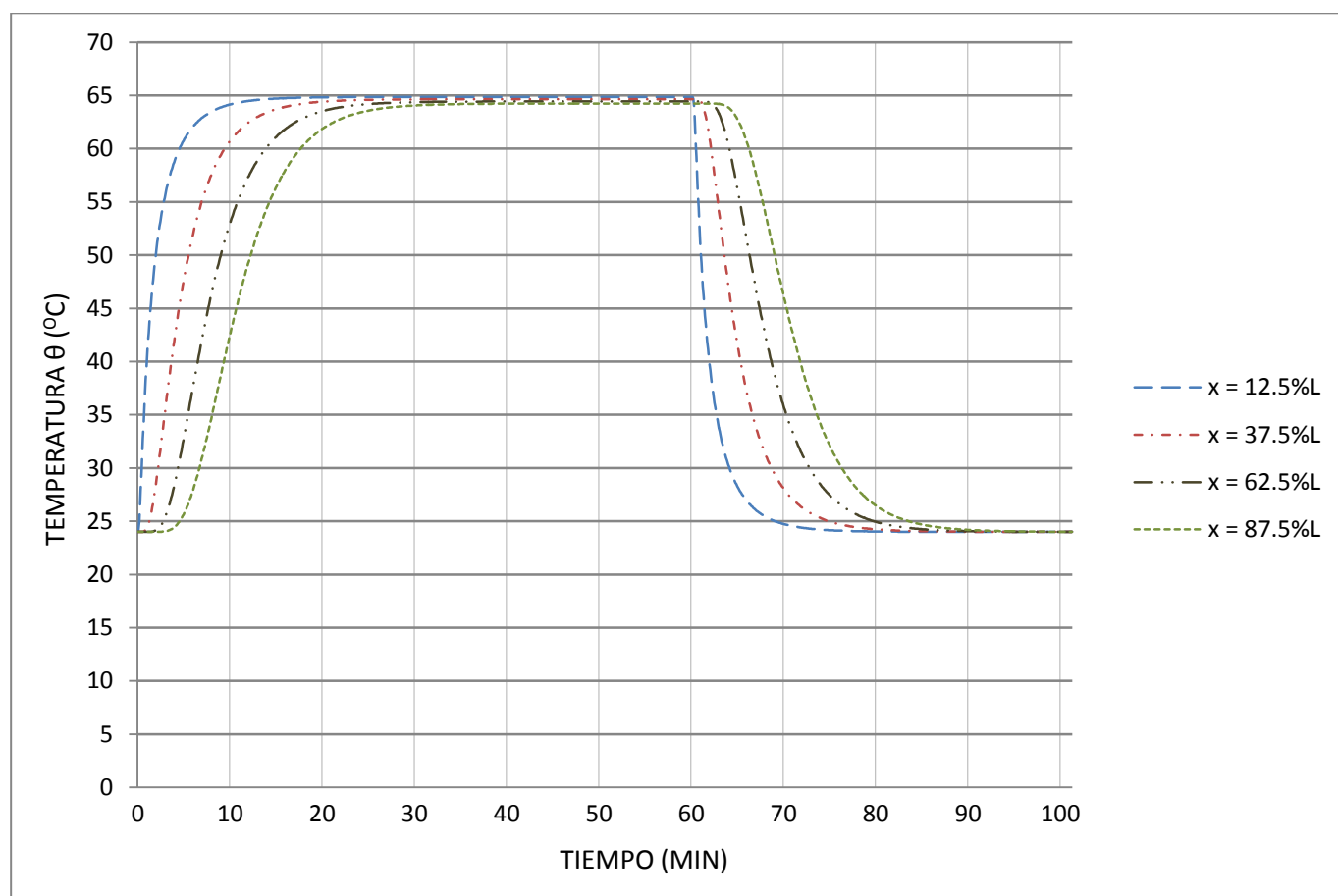
**Fig. 5.14.** Evolución dimensional de la temperatura del lecho durante la carga y descarga para  $Q = 550 \text{ l/min}$  y  $L = 0.2 \text{ m}$



Y por último se muestran la evolución de la temperatura a lo largo del lecho para un caudal de 600 l/min:



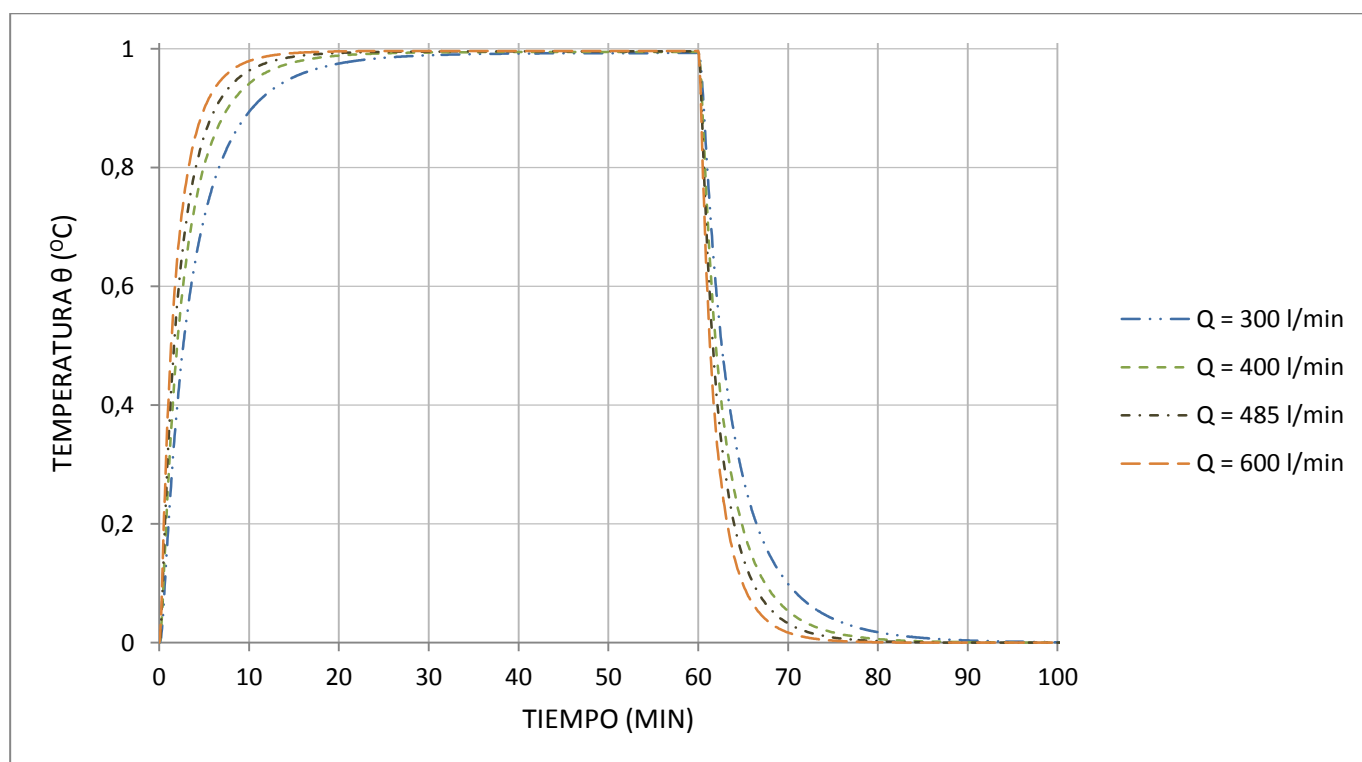
**Fig. 5.15.** Evolución adimensional de la temperatura del lecho durante la carga y descarga para  $Q = 600$  l/min y  $L = 0.2$  m



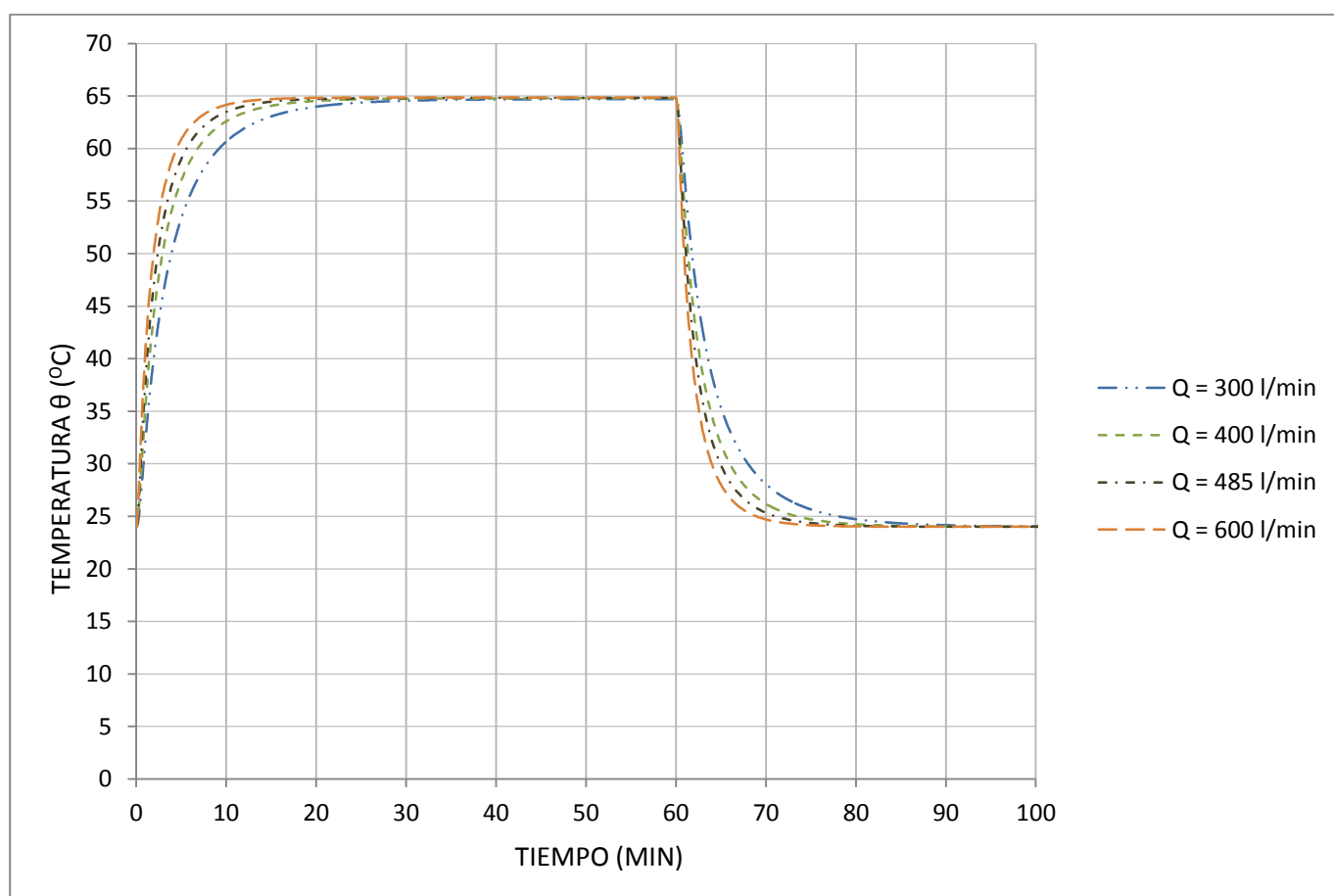
**Fig. 5.16.** Evolución dimensional de la temperatura del lecho durante la carga y descarga para  $Q = 600$  l/min y  $L = 0.2$  m

A continuación se comparará la evolución temporal de la temperatura para cada altura y para los siguientes caudales de aire: 300 l/min, 400 l/min, 485 l/min y 600 l/min. (No se muestran los resultados para la totalidad de los caudales puesto que las diferencias en algunos casos son muy pequeñas y no se aprecian correctamente.)

Para el nodo situado a una altura de 2.5 cm la evolución adimensional de la temperatura con el tiempo para cada caudal de aire:

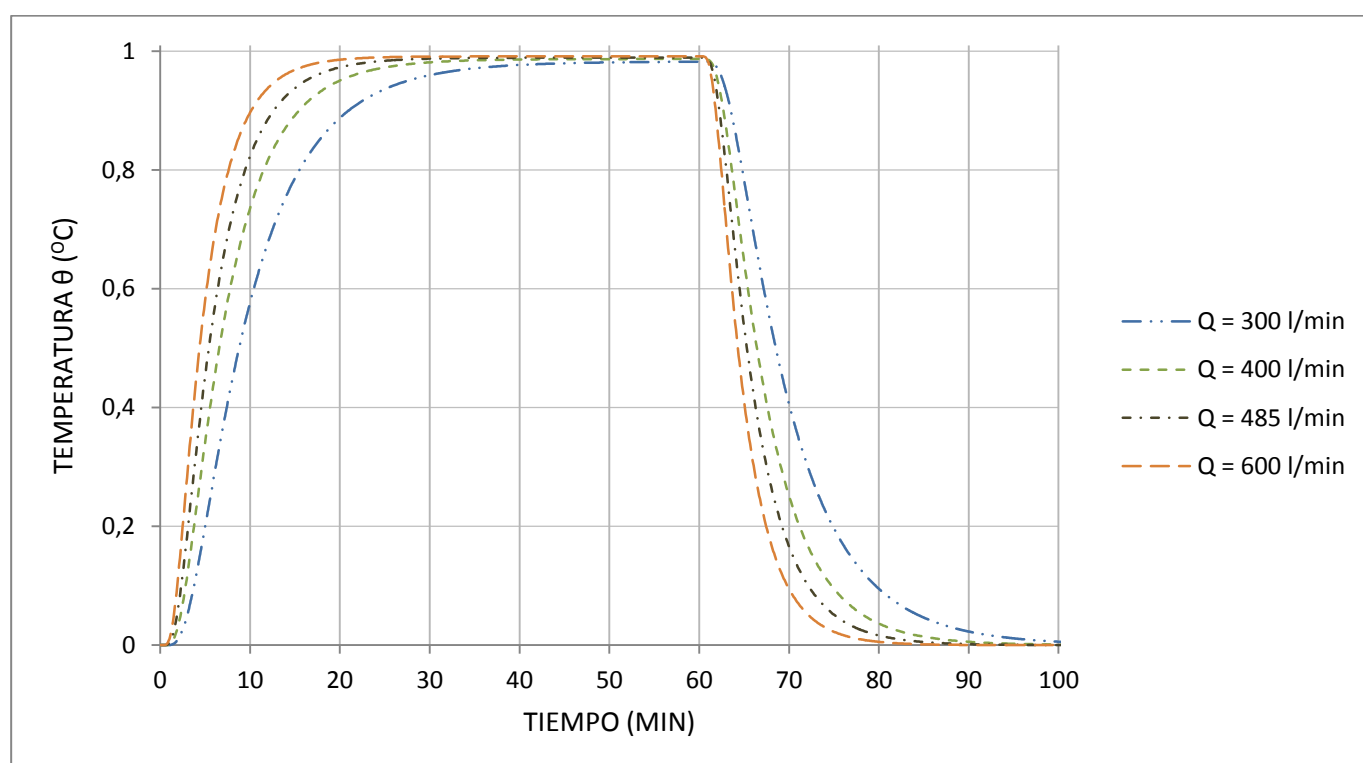


**Fig. 5.17.** Evolución adimensional de la temperatura del lecho durante la carga y descarga variando  $Q$ , para  $x = 2.5$  cm y  $L = 0.2$  m

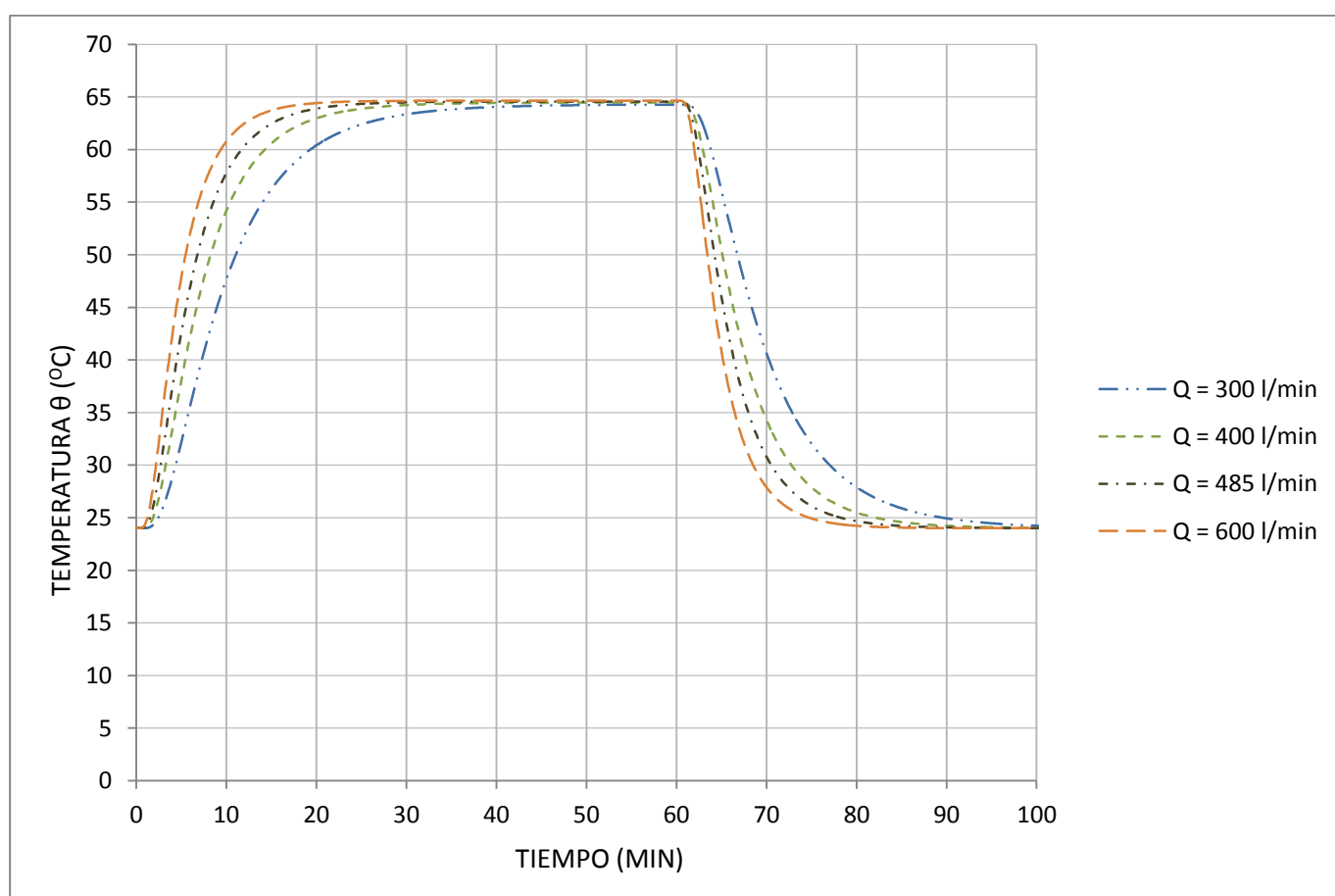


**Fig. 5.18.** Evolución dimensional de la temperatura del lecho durante la carga y descarga variando  $Q$ , para  $x = 2.5$  cm y  $L = 0.2$  m

A continuación se muestra la comparación para los diferentes caudales de la evolución temporal de la temperatura para la altura del lecho  $x = 7.5$  cm:

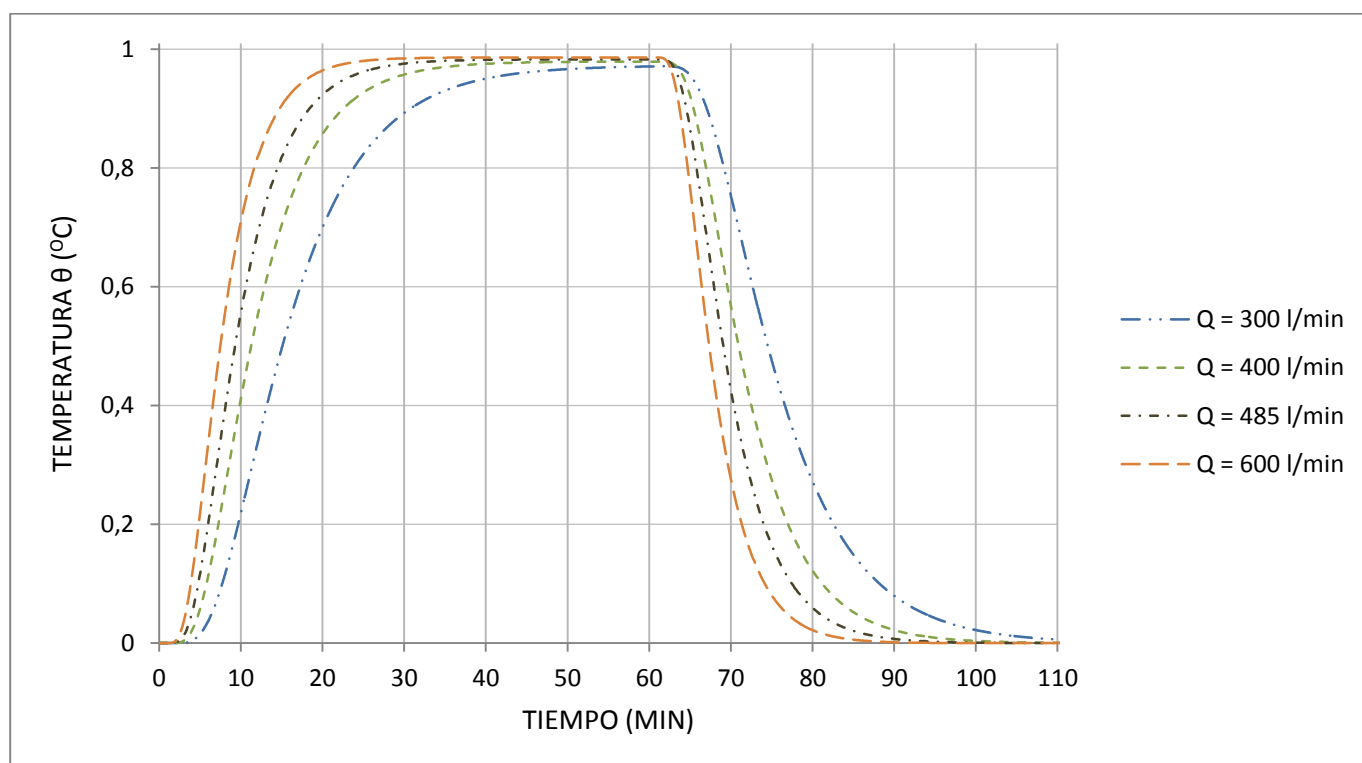


**Fig. 5.19.** Evolución adimensional de la temperatura del lecho durante la carga y descarga variando  $Q$ , para  $x = 7.5$  cm y  $L = 0.2$  m

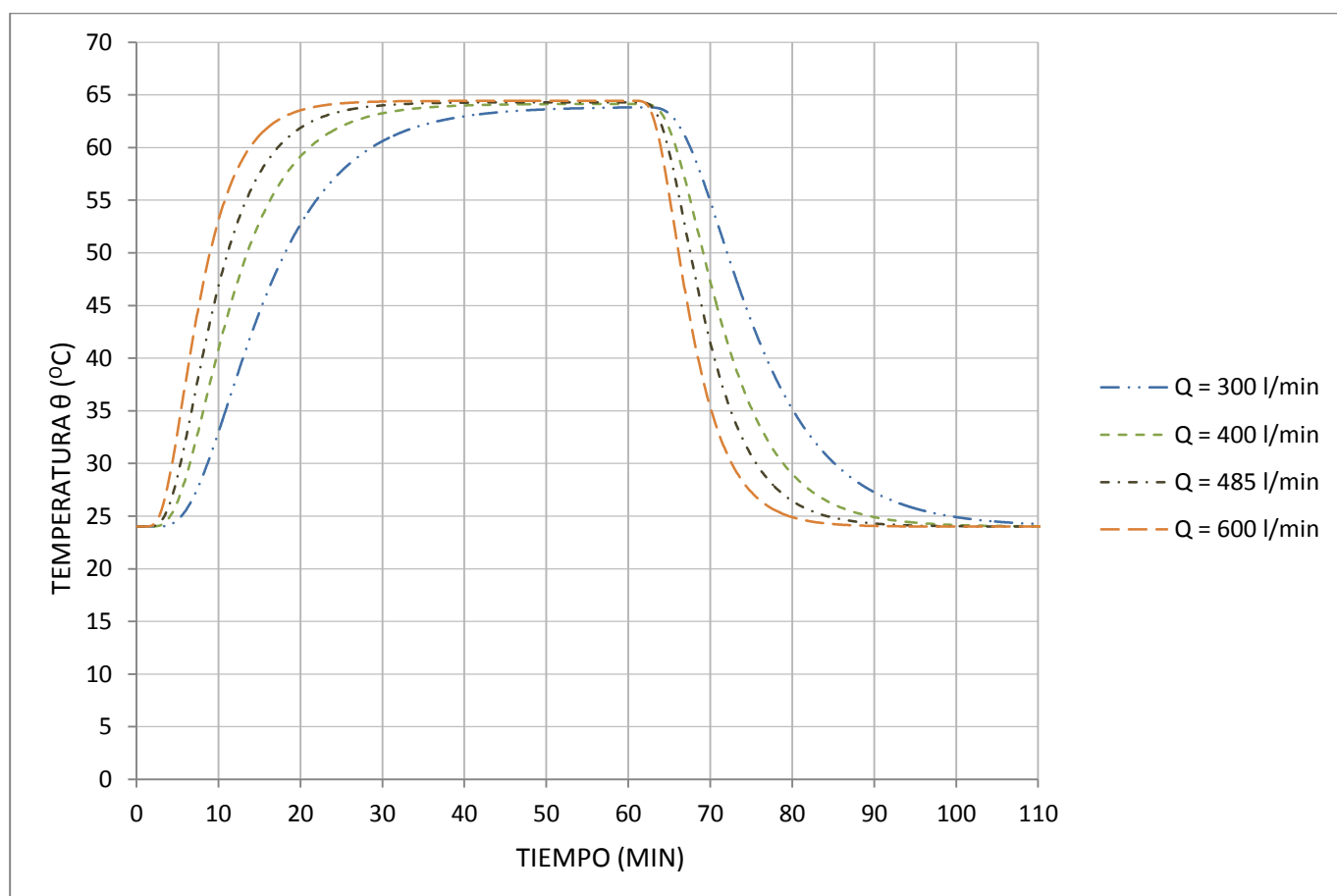


**Fig. 5.20.** *Evolución dimensional de la temperatura del lecho durante la carga y descarga variando  $Q$ , para  $x = 7.5$  cm y  $L = 0.2$  m*

La comparación de la temperatura en el punto del lecho situado a una altura de 12.5 cm para cada uno de los caudales elegidos se muestra en las siguientes gráficas:



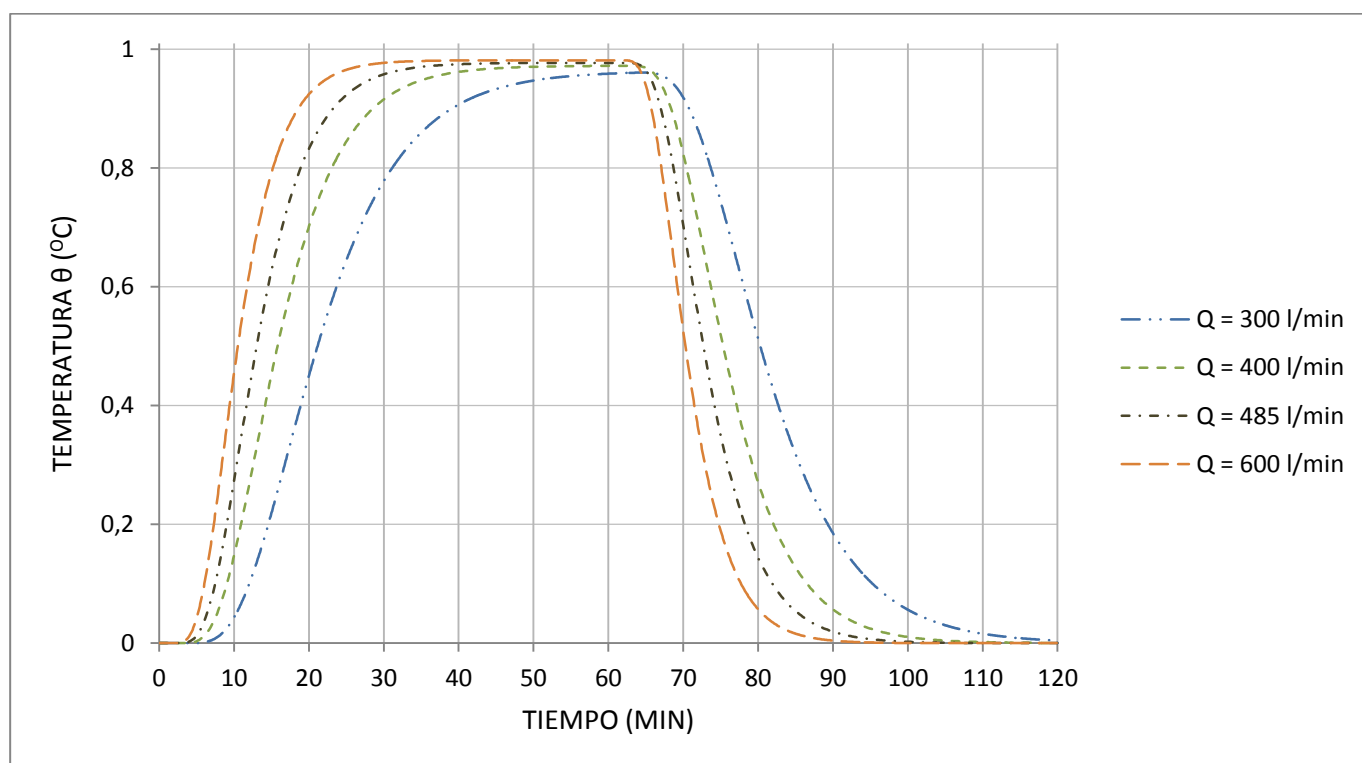
**Fig. 5.21.** Evolución adimensional de la temperatura del lecho durante la carga y descarga variando  $Q$ , para  $x = 12.5$  cm y  $L = 0.2$  m



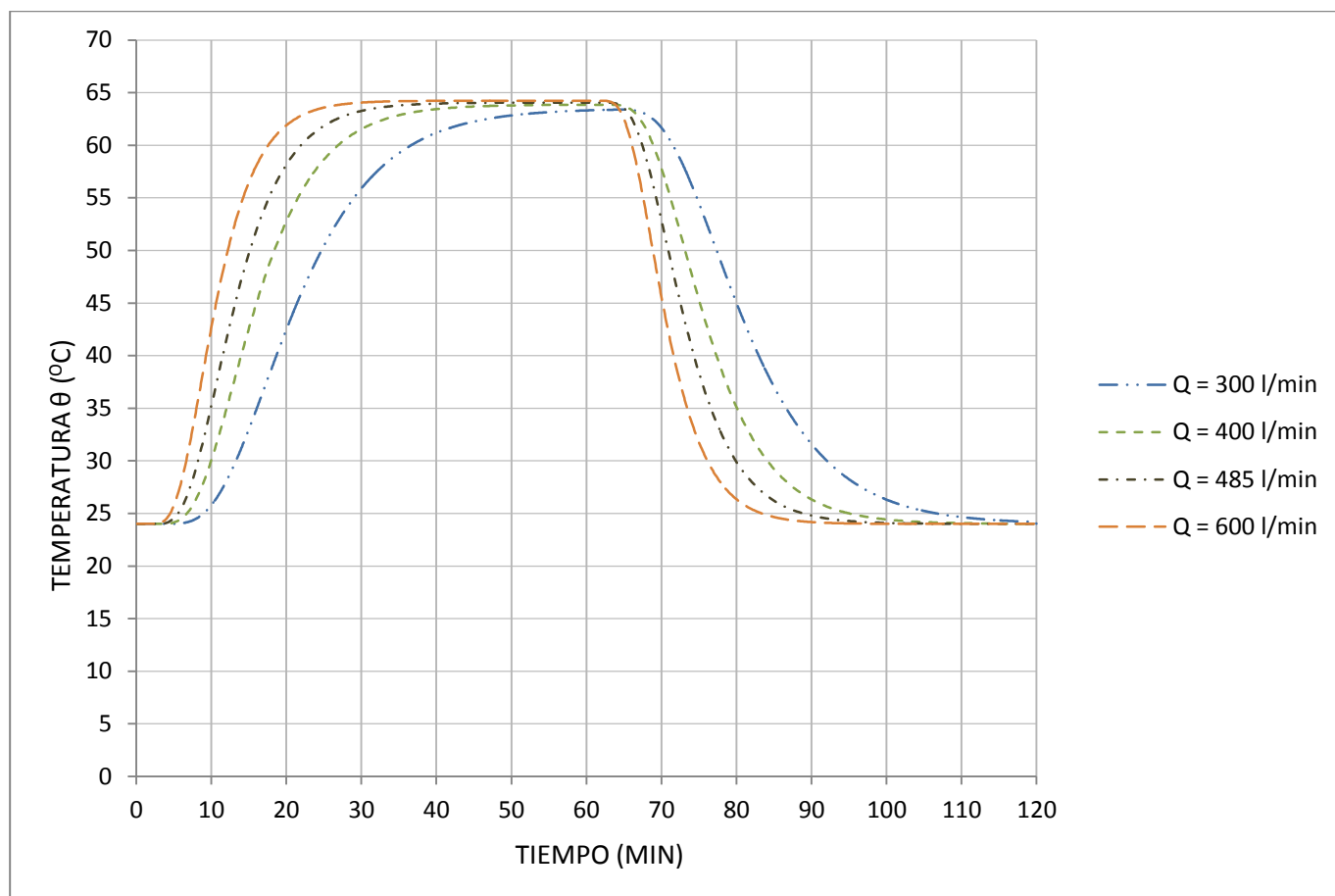
**Fig. 5.22.** Evolución dimensional de la temperatura del lecho durante la carga y descarga variando  $Q$ , para  $x = 12.5$  cm y  $L = 0.2$  m



Por último se muestran los resultados obtenidos para la altura del nodo  $x = 17.5$  cm:



**Fig. 5.23.** Evolución adimensional de la temperatura del lecho durante la carga y descarga variando  $Q$ , para  $x = 17.5$  cm y  $L = 0.2$  m



**Fig. 5.24.** Evolución dimensional de la temperatura del lecho durante la carga y descarga variando  $Q$ , para  $x = 17.5\text{cm}$  y  $L = 0.2\text{ m}$

Puede observarse en las gráficas anteriores el efecto que tiene en el lecho la variación del caudal de aire de entrada, como a medida que aumenta el flujo, es menor el tiempo necesario para alcanzar la temperatura de referencia de  $65^{\circ}\text{C}$  en el proceso de carga. También se puede comprobar como se requiere un menor tiempo para la descarga.

Observar en la gráfica 5.24 como para el punto del lecho situado a  $17.5\text{ cm}$  y para el menor de los caudales,  $300\text{ l/min}$ , el tiempo empleado en el proceso de carga no es suficiente para alcanzar la temperatura de consigna, el sistema tiene una mayor inercia y por lo tanto será menor el almacenamiento total de energía térmica.

### 5.3.2 ALTURA DEL LECHO

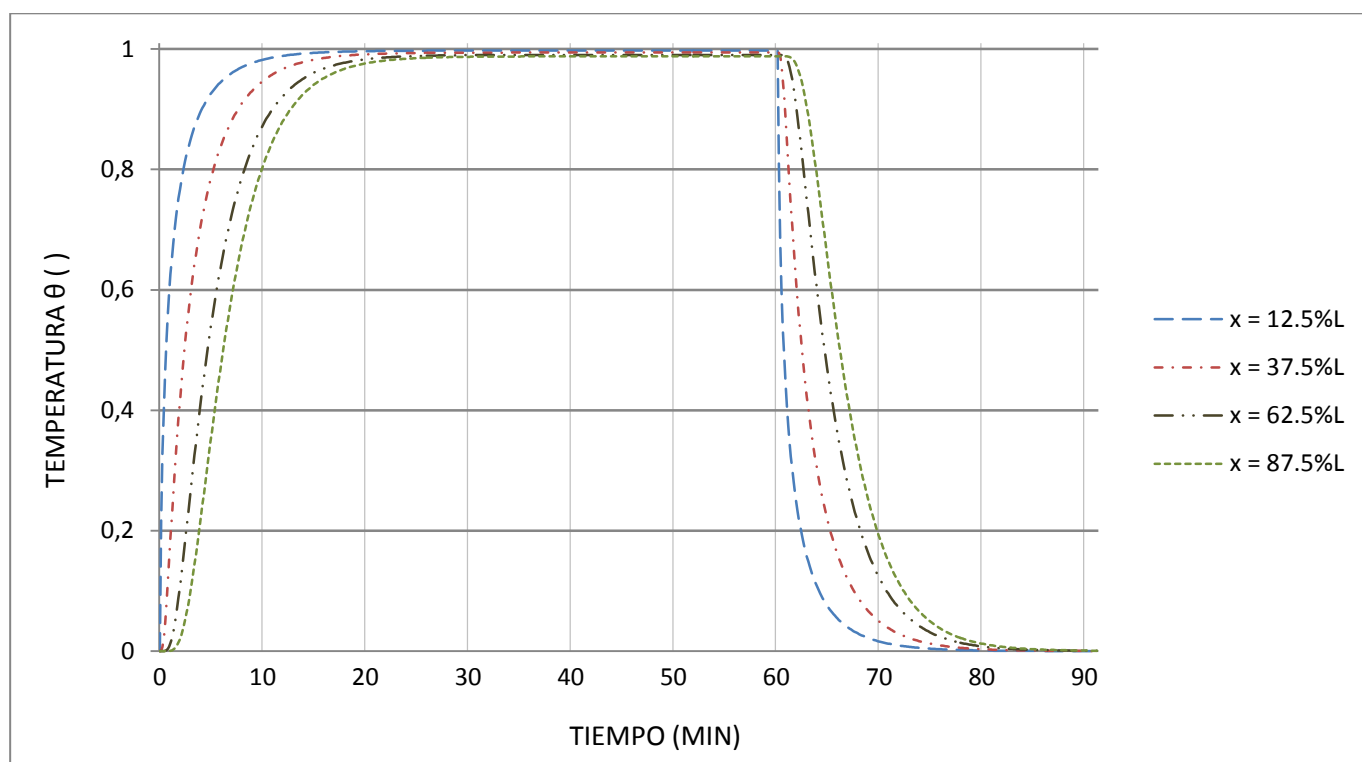
A continuación se va a analizar el efecto que tiene en el proceso de almacenamiento térmico del lecho la variación de otro de los parámetros de operación como es la altura del mismo. Se van a realizar tres simulaciones empleando los siguientes valores proporcionales con respecto a la altura del lecho de referencia:  $0.5L$ ,  $1.5L$  y  $2L$ , lo que corresponden lechos de las siguientes alturas: 0.1 m, 0.3 m y 0.4 m; para todas las simulaciones se mantendrá el caudal de aire fijo en 485 l/min y se compararán con los datos obtenidos para el lecho de referencia.

Al variar la altura del lecho  $L$ , varía el área mediante el cual se intercambia calor con el ambiente, por lo tanto cambiarán los valores del coeficiente de transferencia de calor con el exterior  $h_{iso}$ , y el valor del coeficiente global de transferencia de calor  $U$ , el resto de parámetros permanece constante. Los valores de  $h_{iso}$  y  $U$  para cada altura del lecho son:

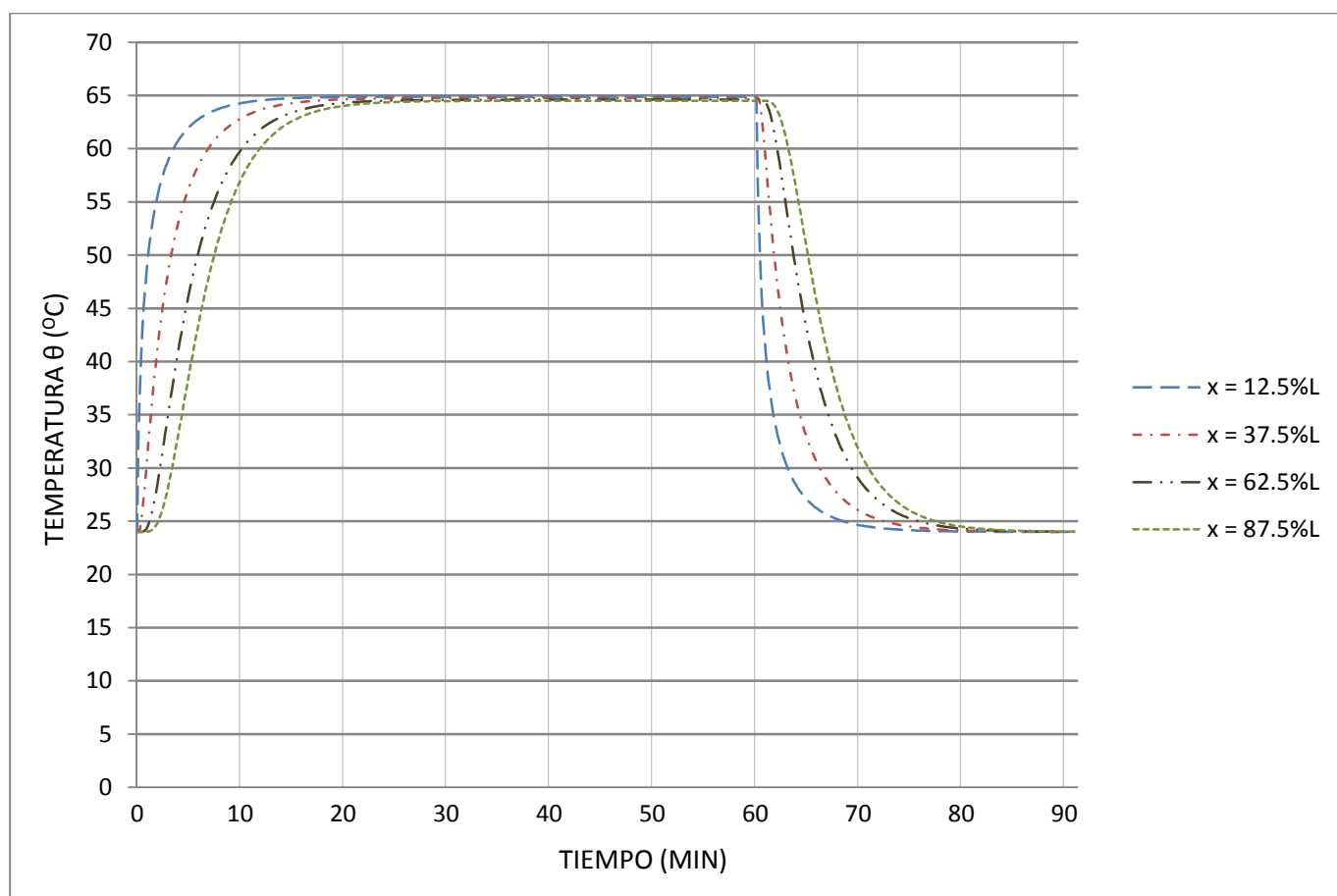
ALTURA	$h_{iso}$ (W/m <sup>2</sup> ·k)	$U$ (W/m <sup>2</sup> ·k)
<b>0.5L</b>	7,4215	2,08
<b>1.5L</b>	5,563	1,9267
<b>2L</b>	5,1662	1,8838

**Tabla 5.2.** *Propiedades dependientes de la altura del lecho*

A continuación se muestran los resultados que arroja la simulación para un lecho de altura 0.1m; de nuevo se mostrará la evolución dimensional y adimensional de la temperatura en el lecho a lo largo del tiempo para cuatro puntos situados en la misma situación en proporción con el lecho de altura 0.2m: 1.25 cm, 3.75 cm, 6.25 cm y 8.75 cm:

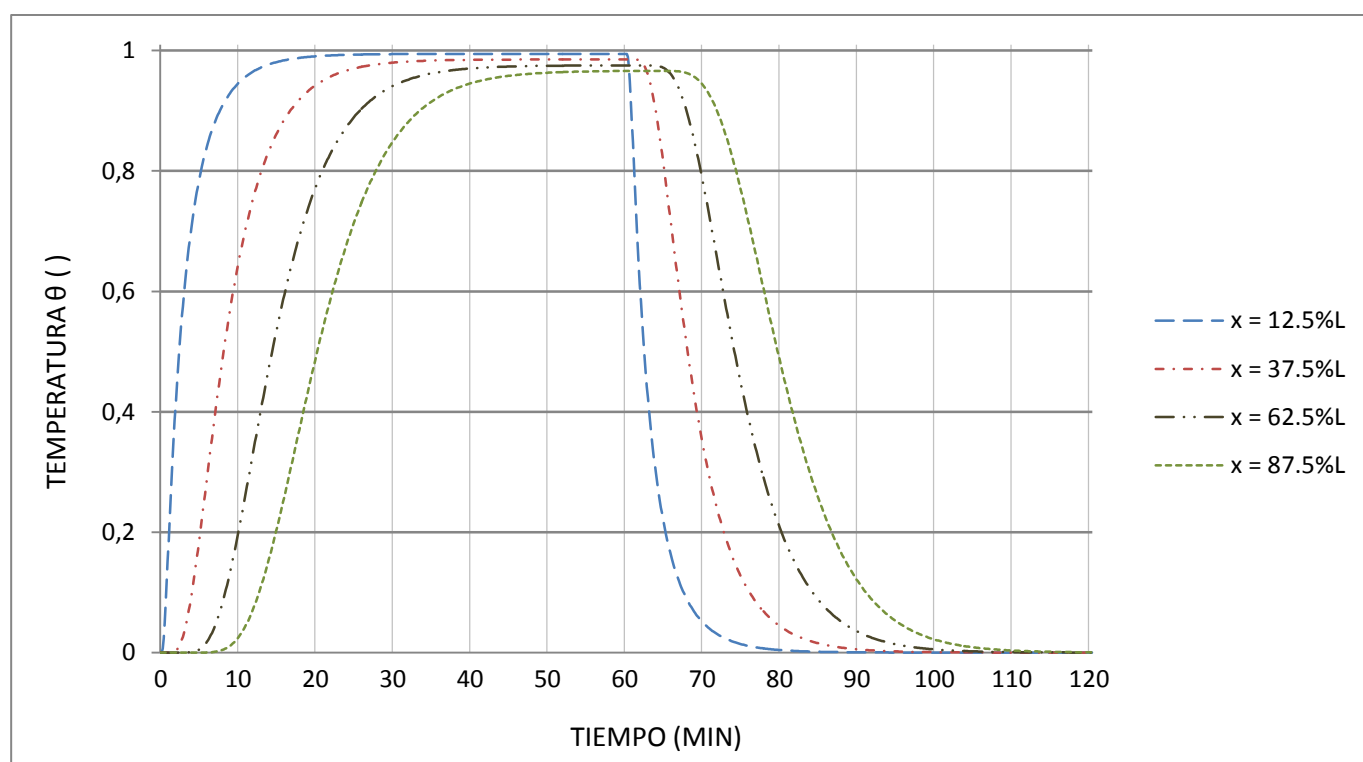


**Fig. 5.25.** Evolución adimensional de la temperatura del lecho durante la carga y descarga para  $Q = 485 \text{ l/min}$  y  $L = 0.1 \text{ m}$

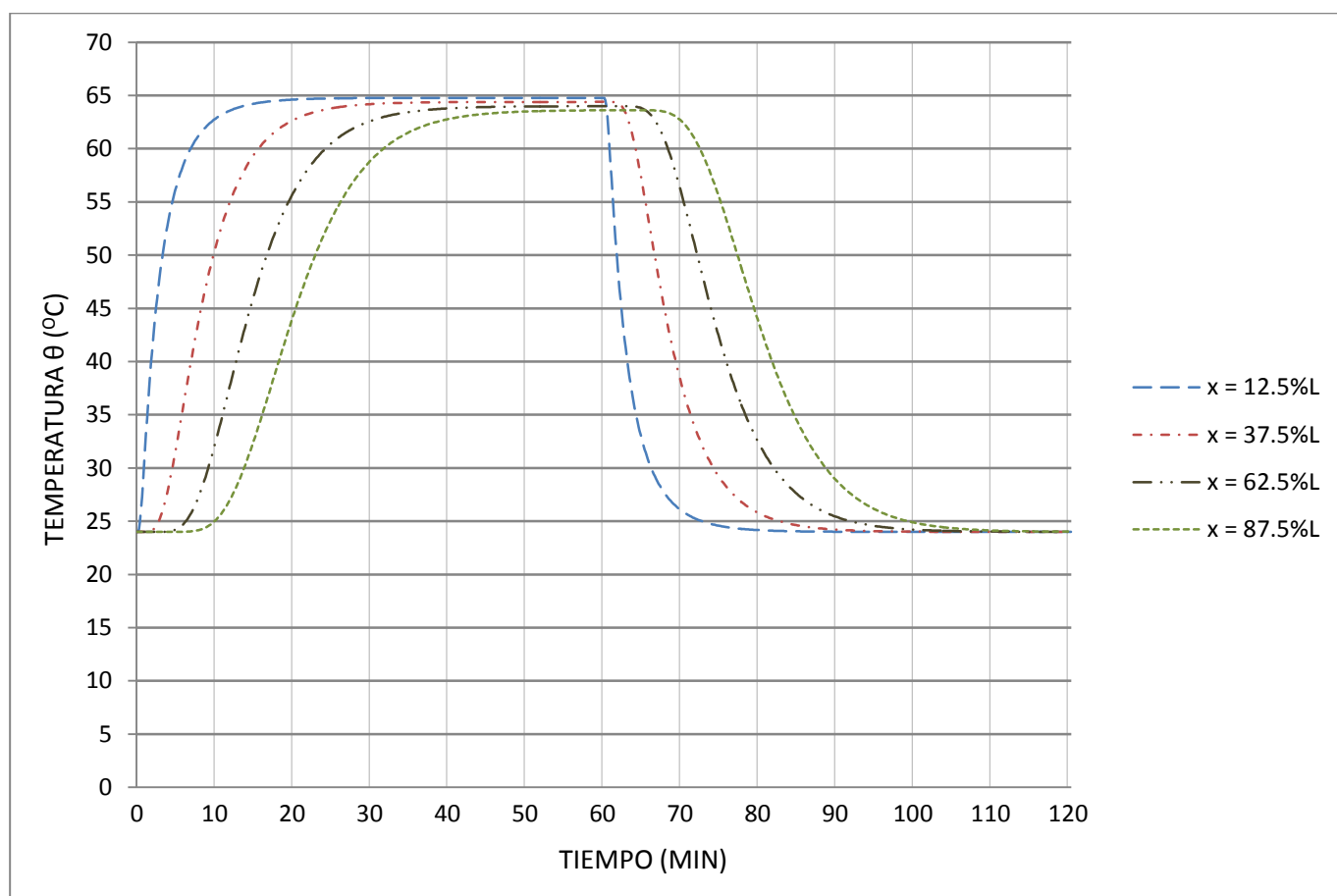


**Fig. 5.26.** Evolución dimensional de la temperatura del lecho durante la carga y descarga para  $Q = 485$  l/min y  $L = 0.1$  m

La evolución temporal de la temperatura en cada uno de los puntos elegidos, situado respectivamente a una altura de: 3.75 cm (12.5%L), 11.25 cm (37.5%L), 18.75 cm (62.5%L) y 26.25 cm (87.5%L), para un lecho de altura 0.3 m es la siguiente:

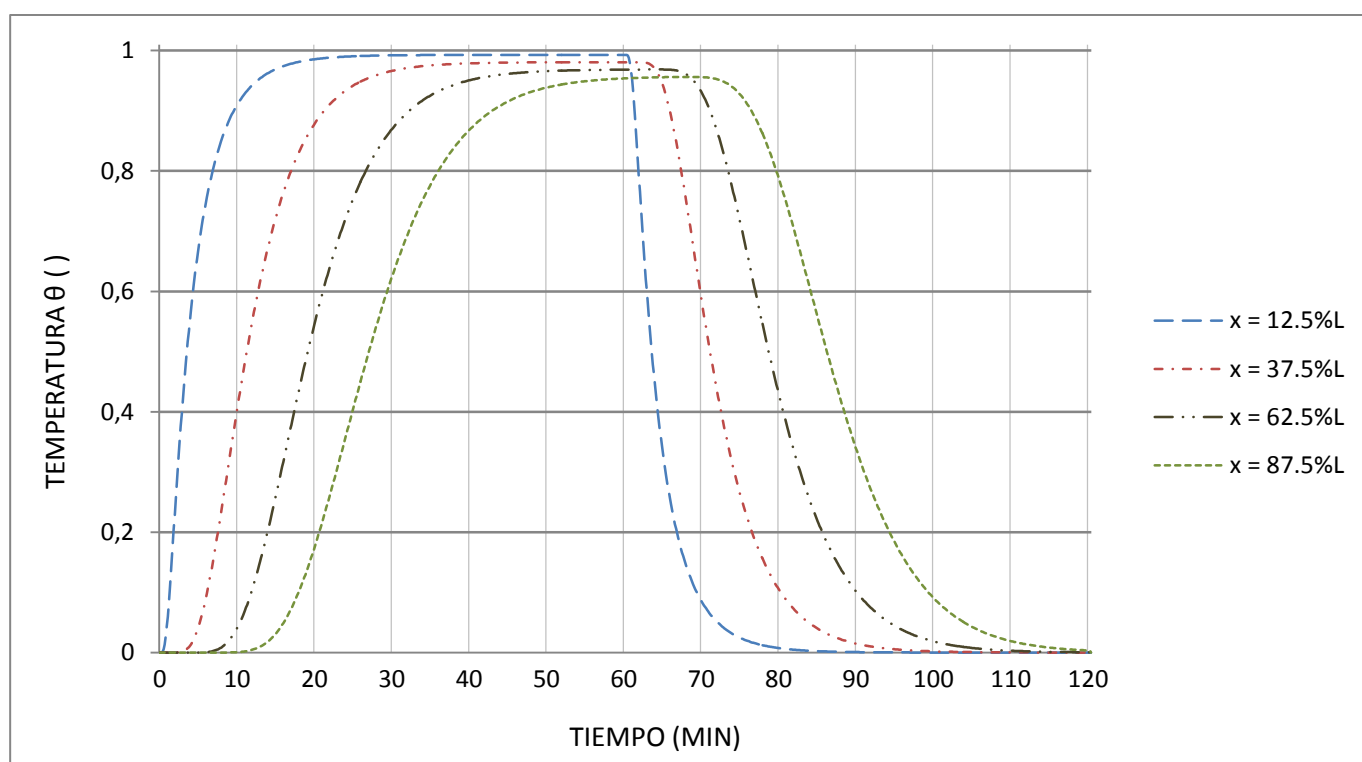


**Fig. 5.27.** Evolución adimensional de la temperatura del lecho durante la carga y descarga para  $Q = 485$  l/min y  $L = 0.3$  m



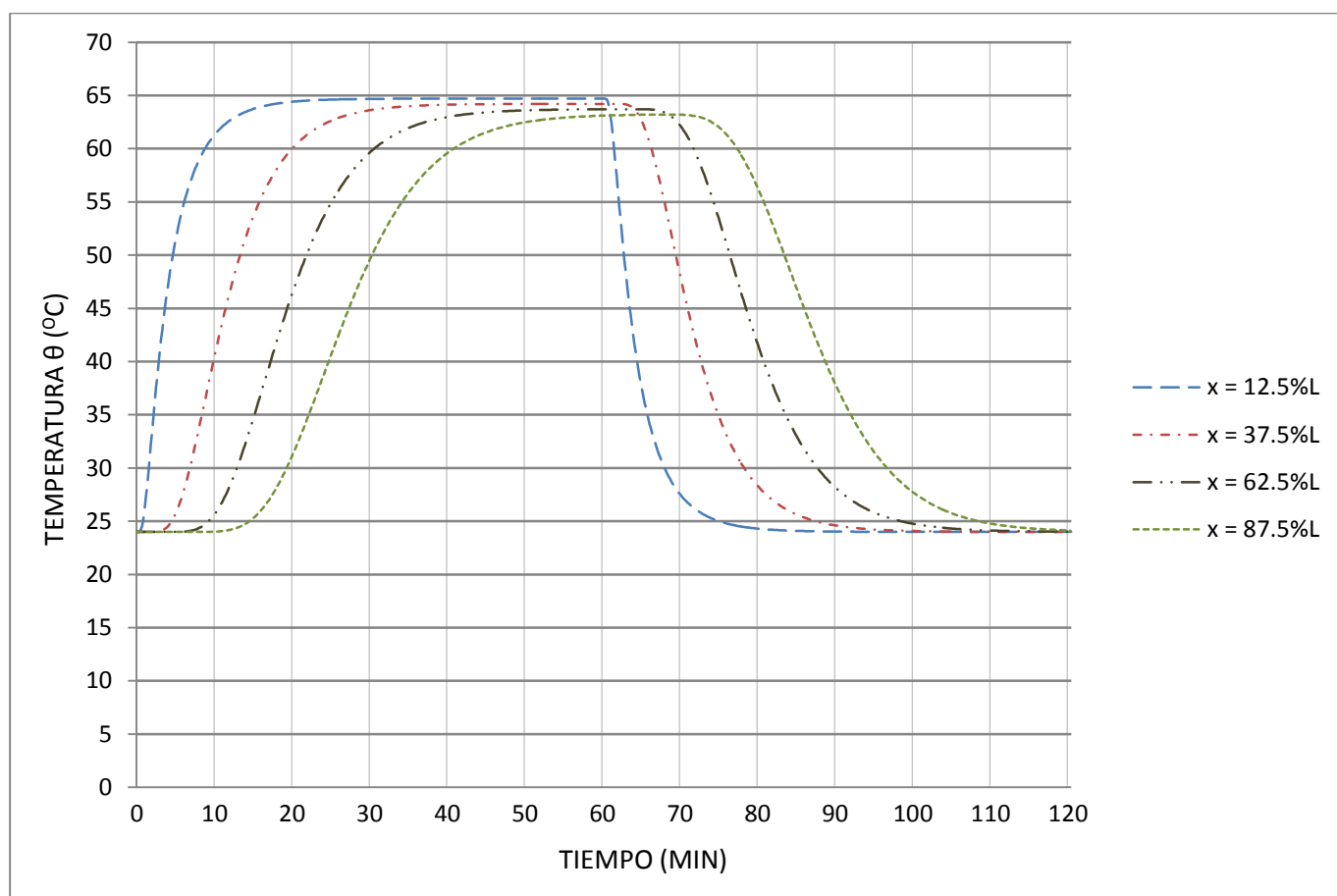
**Fig. 5.28.** Evolución dimensional de la temperatura del lecho durante la carga y descarga para  $Q = 485 \text{ l/min}$  y  $L = 0.3 \text{ m}$

A continuación se muestra la evolución temporal de la temperatura para una altura de 0.4 m. Cada uno de los cuatro nodos elegidos está situado respectivamente a una altura de: 5 cm (12.5%L), 15 cm (37.5%L), 25 cm (62.5%L) y 35 cm (87.5%L):



**Fig. 5.29.** Evolución adimensional de la temperatura del lecho durante la carga y descarga para  $Q = 485$  l/min y  $L = 0.4$  m

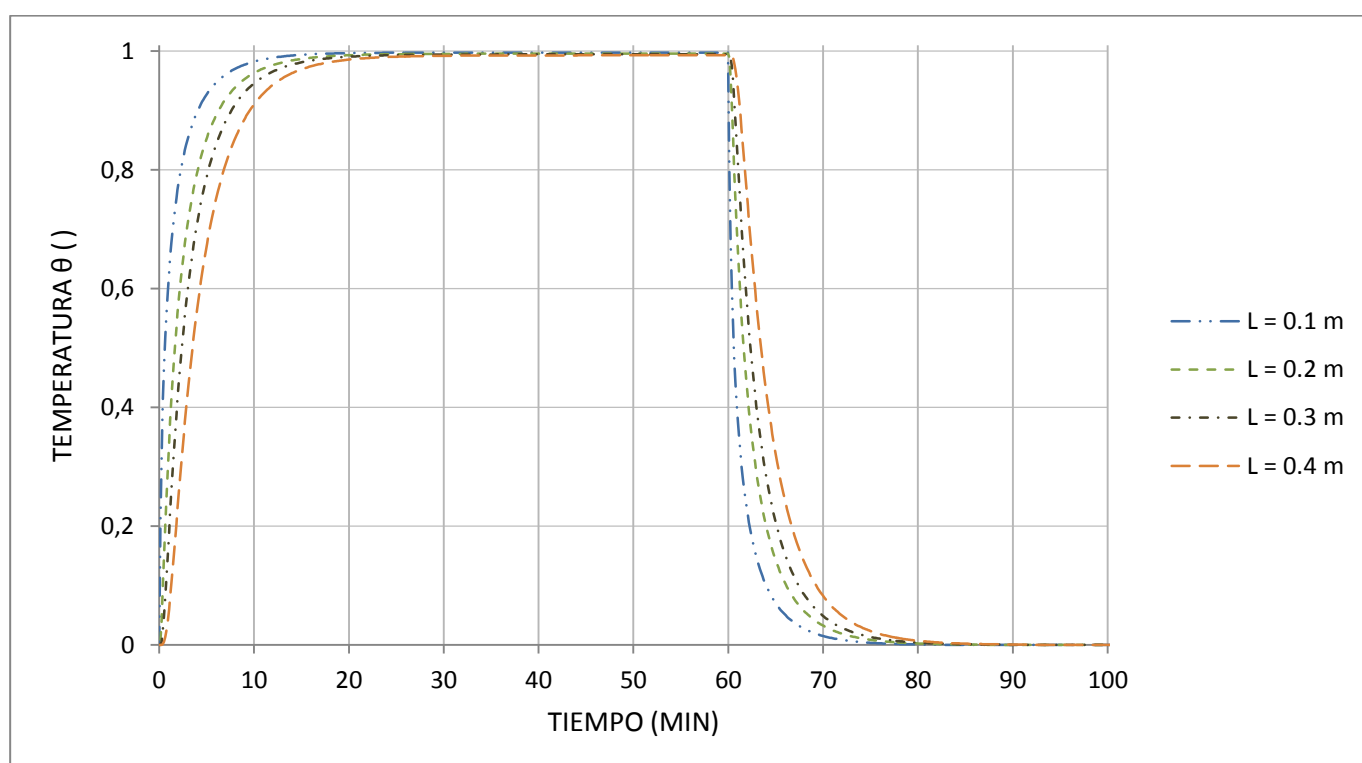




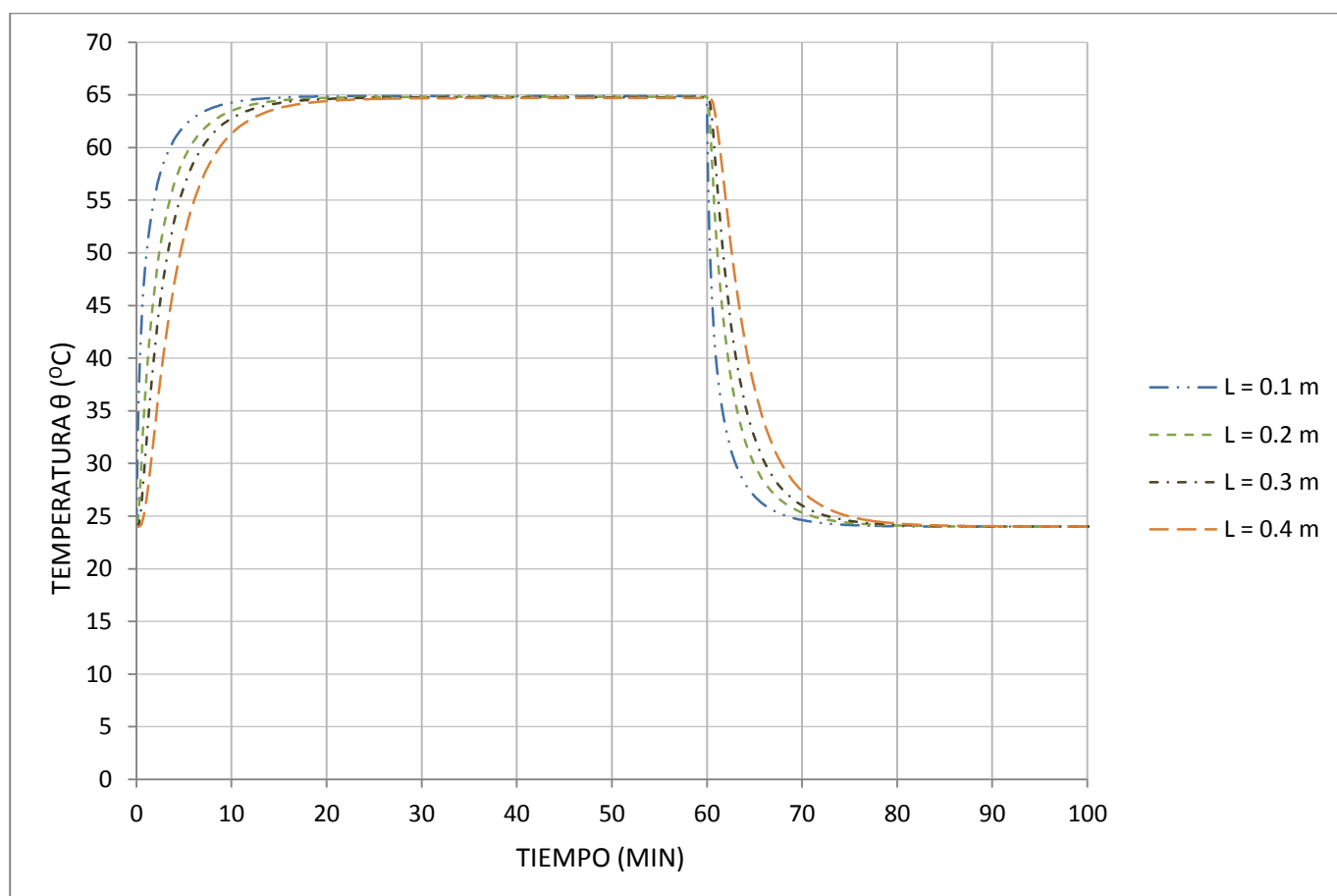
**Fig. 5.30.** Evolución dimensional de la temperatura del lecho durante la carga y descarga para  $Q = 485 \text{ l/min}$  y  $L = 0.4 \text{ m}$

A continuación se comparará la evolución temporal de la temperatura en cada nodo elegido que se encuentra en proporción a la misma distancia en cada uno de los lechos de diferente altura, manteniendo constante el caudal de entrada de aire en 485 l/min.

Para el nodo situado a 12.5% de la altura del lecho, la evolución adimensional de la temperatura con el tiempo para cada altura del lecho es la que se muestra en la siguiente gráfica:

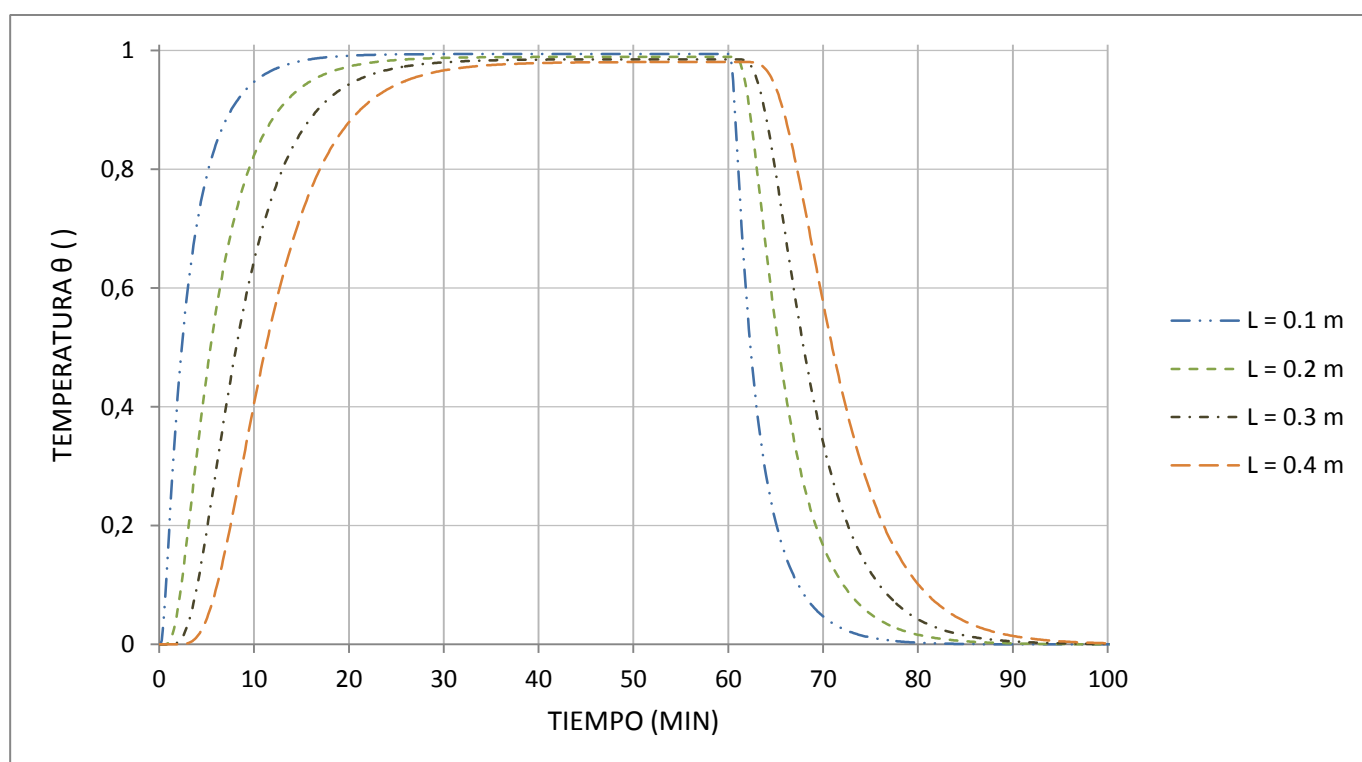


**Fig. 5.31.** Evolución adimensional de la temperatura del lecho durante la carga y descarga variando  $L$ , para  $x = 12.5\%L$  y  $Q = 485$  l/min

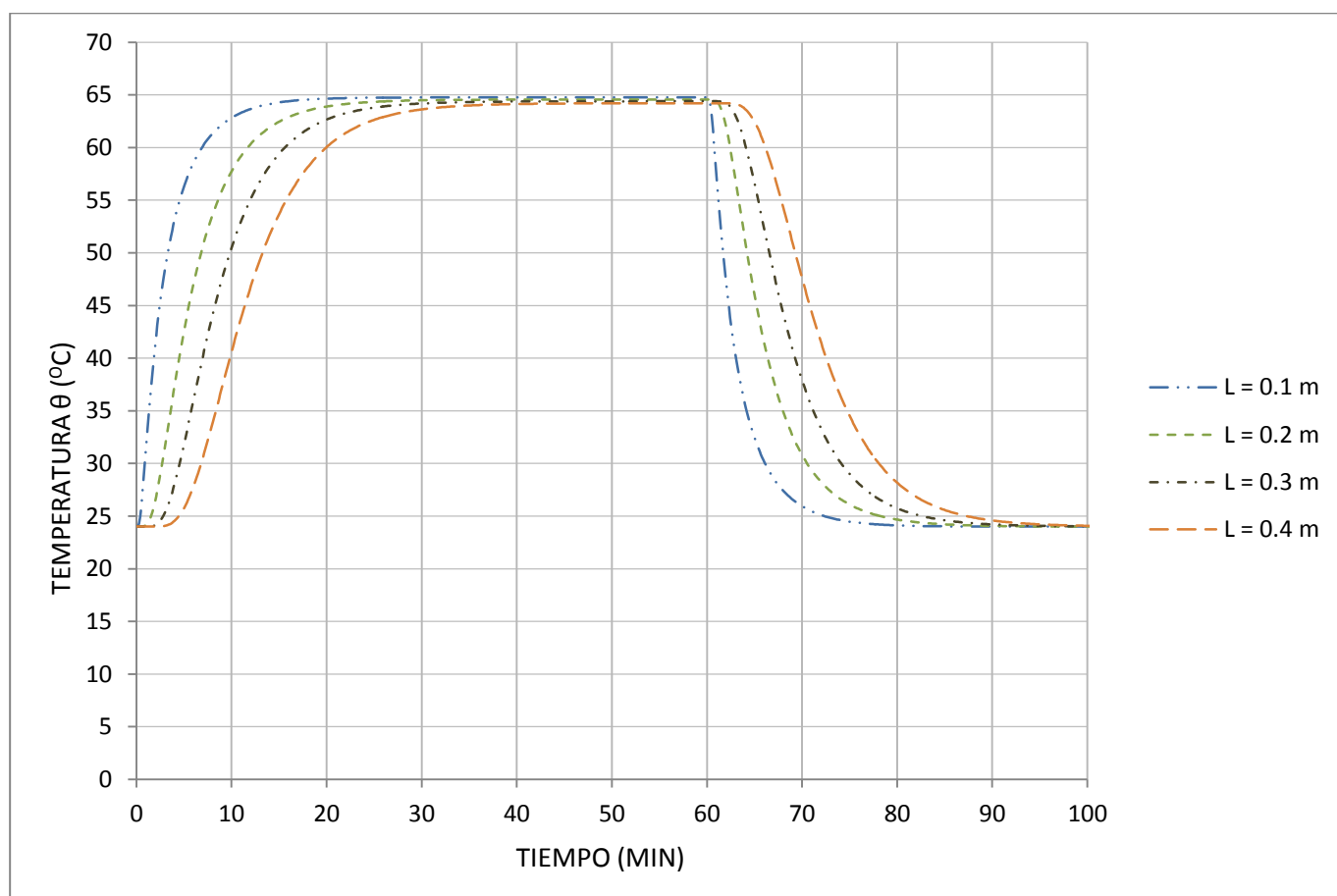


**Fig. 5.32.** Evolución dimensional de la temperatura del lecho durante la carga y descarga variando  $L$ , para  $x = 12.5\%L$  y  $Q = 485$  l/min

A continuación se muestra la comparación de la evolución temporal de la temperatura en el nodo situado a un 37.5% de la altura del lecho para cada una de las alturas simuladas:

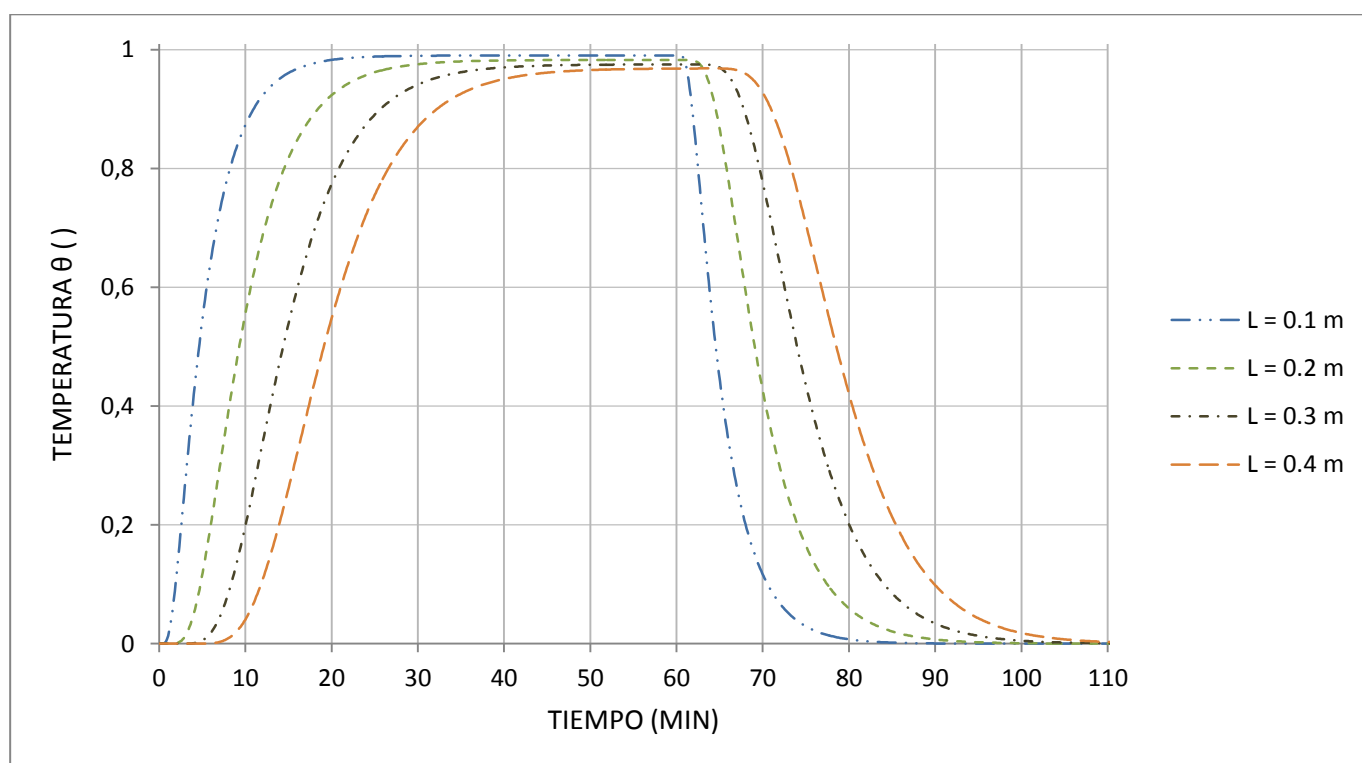


**Fig. 5.33.** Evolución adimensional de la temperatura del lecho durante la carga y descarga variando  $L$ , para  $x = 37.5\%L$  y  $Q = 485 \text{ l/min}$

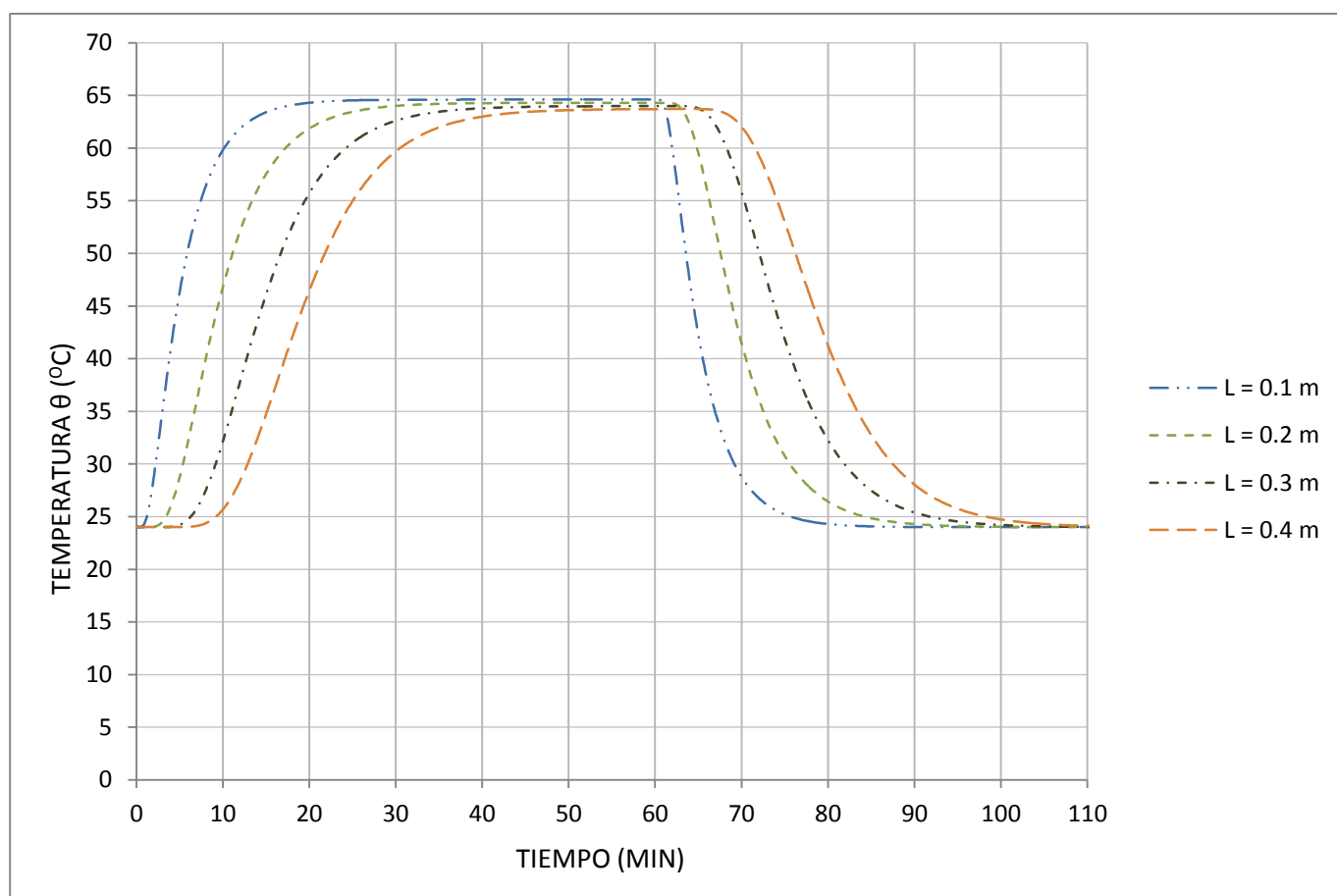


**Fig. 5.34.** Evolución dimensional de la temperatura del lecho durante la carga y descarga variando  $L$ , para  $x = 37.5\%L$  y  $Q = 485 \text{ l/min}$

Para el nodo situado a una altura del lecho de  $62.5\%L$ , las gráficas que muestran la evolución temporal de la temperatura para cada altura son las siguientes:

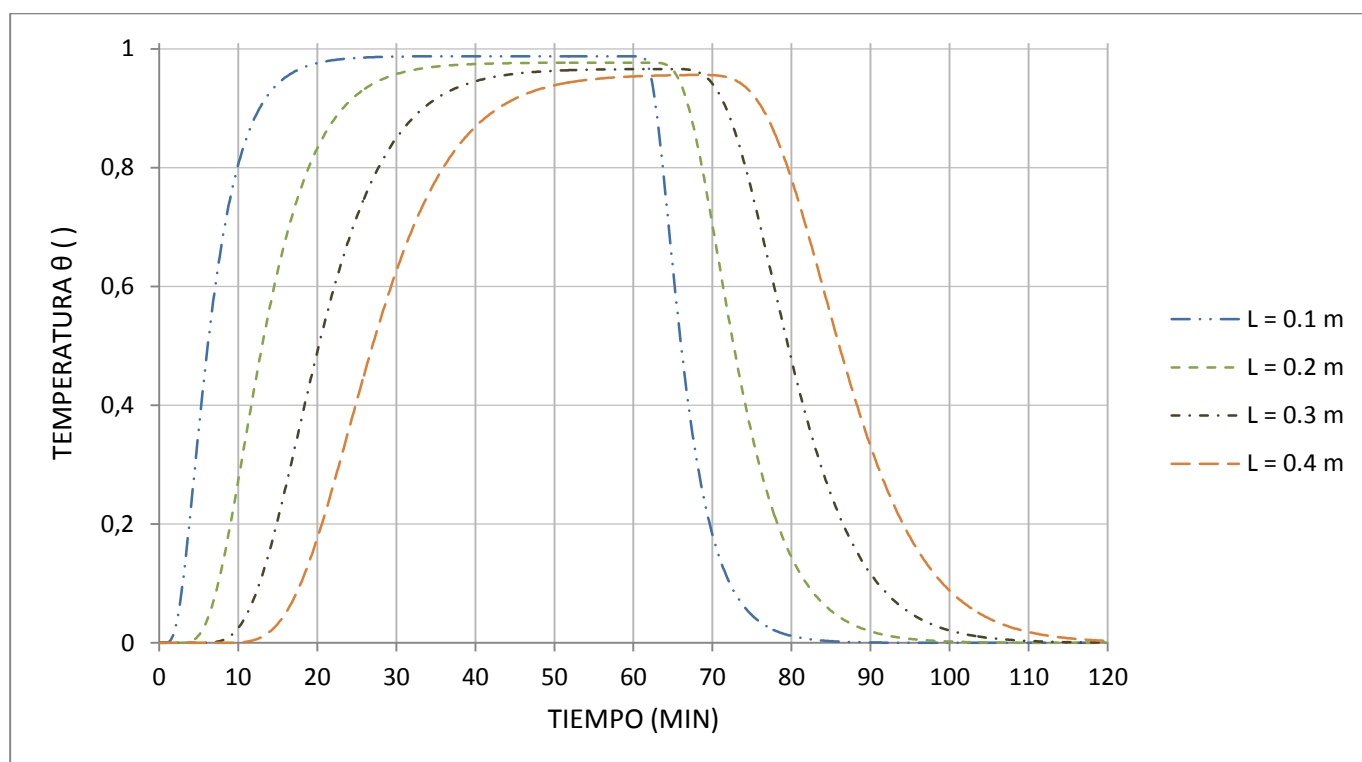


**Fig. 5.35.** Evolución adimensional de la temperatura del lecho durante la carga y descarga variando  $L$ , para  $x = 62.5\%L$  y  $Q = 485 \text{ l/min}$



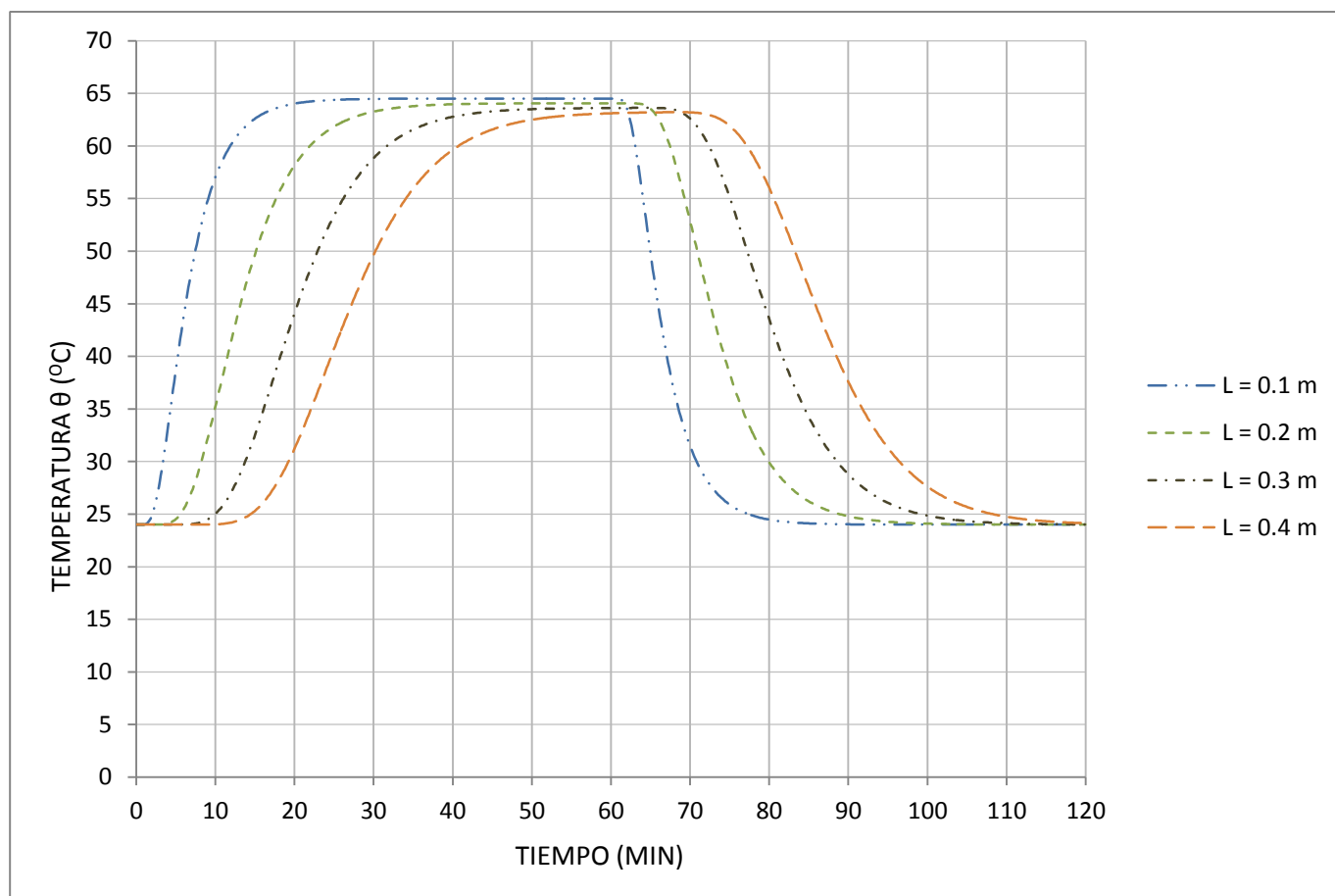
**Fig. 5.36.** Evolución dimensional de la temperatura del lecho durante la carga y descarga variando  $L$ , para  $x = 62.5\%L$  y  $Q = 485$  l/min

A continuación se muestran los resultados para la altura  $87.5\%L$ :



**Fig. 5.37.** Evolución adimensional de la temperatura del lecho durante la carga y descarga variando  $L$ , para  $x = 87.5\%L$  y  $Q = 485$  l/min





**Fig. 5.38.** Evolución dimensional de la temperatura del lecho durante la carga y descarga variando  $L$ , para  $x = 87.5\%L$  y  $Q = 485\text{ l/min}$

Se puede observar en todas las gráficas anteriores como para el lecho de menor altura se requiere un menor tiempo en alcanzar el régimen permanente, pues hay menos sólido que calentar, y como para el lecho de mayor altura las pérdidas son superiores

Como se dijo al comienzo del presente punto, el estudio de los parámetros de operación se completará con el cálculo de la eficiencia y del factor de almacenamiento del lecho.

## 5.4 FACTOR DE ALMACENAMIENTO DEL LECHO Y EFICIENCIA

En este apartado se analizará la dependencia que existe entre la variación temporal de la temperatura del lecho y el factor de almacenamiento y la eficiencia de almacenamiento térmico en ambos procesos de carga del lecho, y recuperación del calor o descarga. Se estudiarán estos parámetros para el lecho de referencia, y a continuación se analizará la dependencia con los parámetros de operación: flujo de aire y altura.

### 5.4.1 FACTOR DE ALMACENAMIENTO (*BSF*)

El factor de almacenamiento, denominado a partir de ahora *BSF* (del inglés: *Bed Storage Factor*), representa la proporción de energía térmica almacenada en el lecho con respecto a la máxima energía posible que es capaz de almacenar, esto es, la energía almacenada si todo el material del lecho consiguiera alcanzar la temperatura máxima. Puede calcularse según la siguiente expresión [6]:

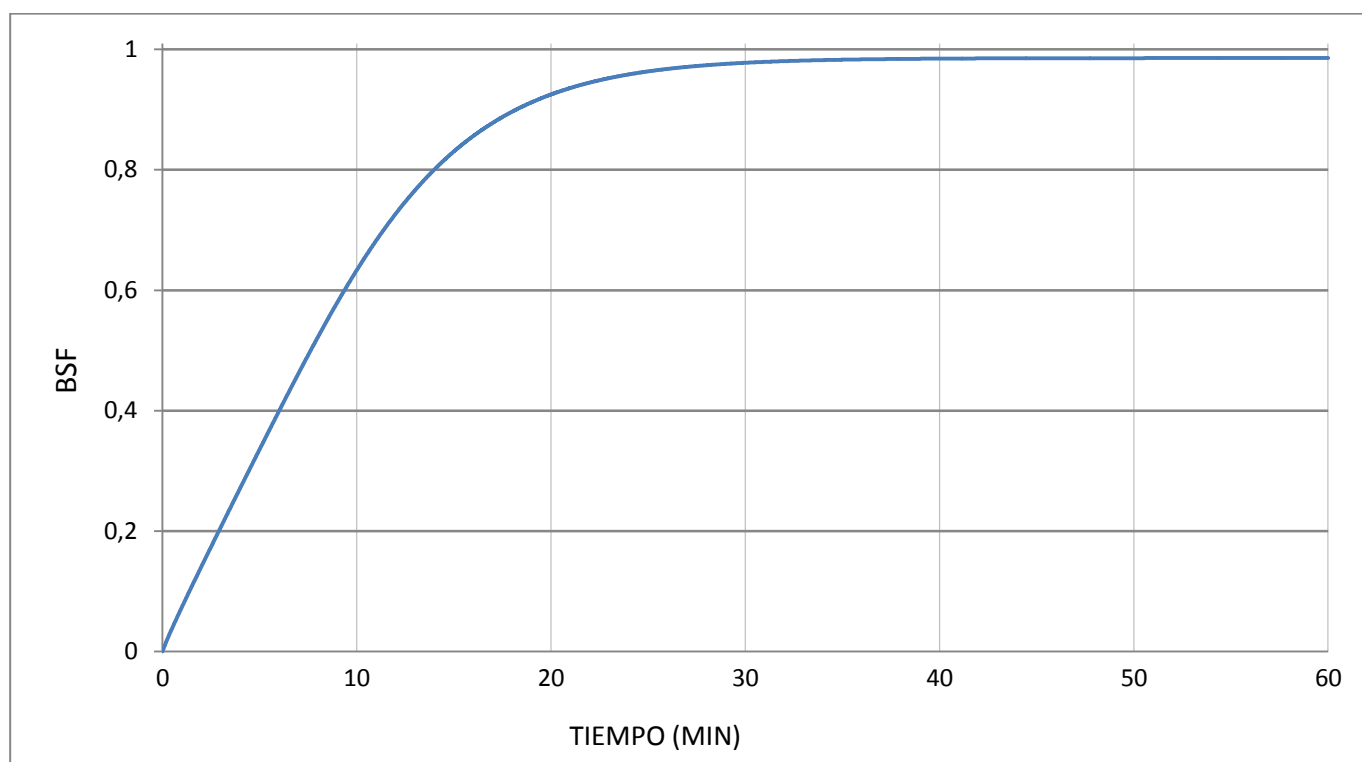
$$BSF = \frac{1}{c_{ps}m_s} \sum_{i=1}^n \hat{\theta}_{s,i} c_{ps} \Delta m_{s,i} \quad (5.1)$$

donde  $\Delta m_{s,i}$  es la cantidad de arena contenida en una porción de lecho cuya temperatura media es  $\theta_{s,i}$ , y  $n$  sería el total de porciones en las que se divide la altura del lecho. Por su parte  $m_s$  sería la cantidad total de arena contenida en el lecho fijo.

Aprovechando la división en porciones de la altura realizada en la discretización del dominio mediante la cual ya conocemos la temperatura  $\hat{\theta}_{s,i}$ , que sería la del nodo situado en cada porción, y suponiendo que la arena esta distribuida uniformemente a lo largo del lecho se puede sustituir la cantidad de masa de arena  $\Delta m_{s,i}$  en cada división por la altura de cada porción  $\Delta x$ . Con ello, y sabiendo que el calor específico de la arena  $c_{ps}$  es constante, quedaría:

$$BSF = \frac{\sum_{i=1}^n \hat{\theta}_{s,i} \cdot \Delta x}{L} \quad (5.2)$$

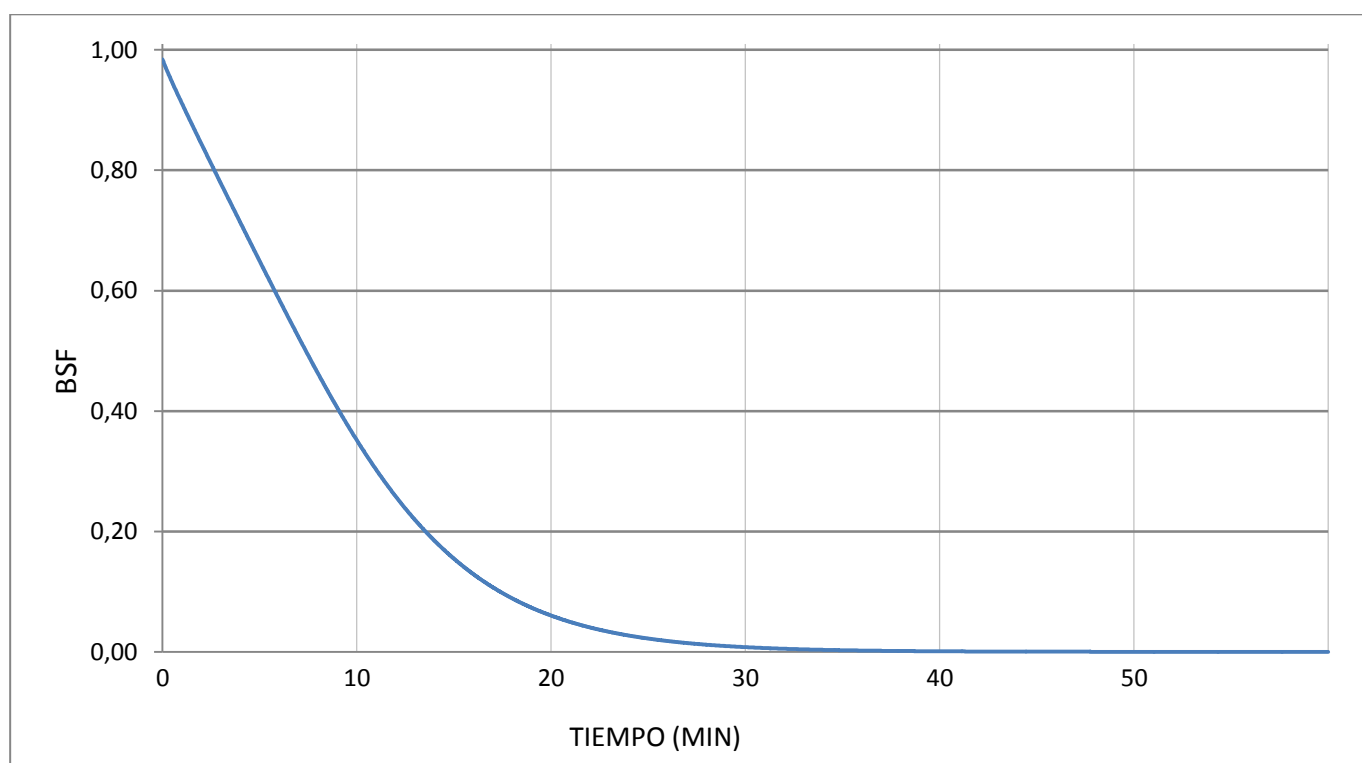
A continuación se muestra la evolución temporal del BSF a lo largo de los 60 minutos del proceso de carga para el lecho de referencia de altura 0.2 m y con un caudal de aire de entrada de 485 l/min:



**Fig. 5.39.** *Evolución temporal del BSF del lecho durante la carga, para  $L = 0.2$  m y  $Q = 485$  l/min*

Se puede observar en la gráfica 5.39, como transcurridos unos 8 minutos almacenando calor, el lecho ha almacenado un 50% de la energía máxima que puede almacenar. También comprobar como a la media hora del inicio del proceso de carga ha alcanzado la máxima energía almacenada con un valor del 98%. El 2% restante se atribuye a las pérdidas de calor.

Seguidamente se muestra la evolución temporal del BSF para el proceso de descarga:

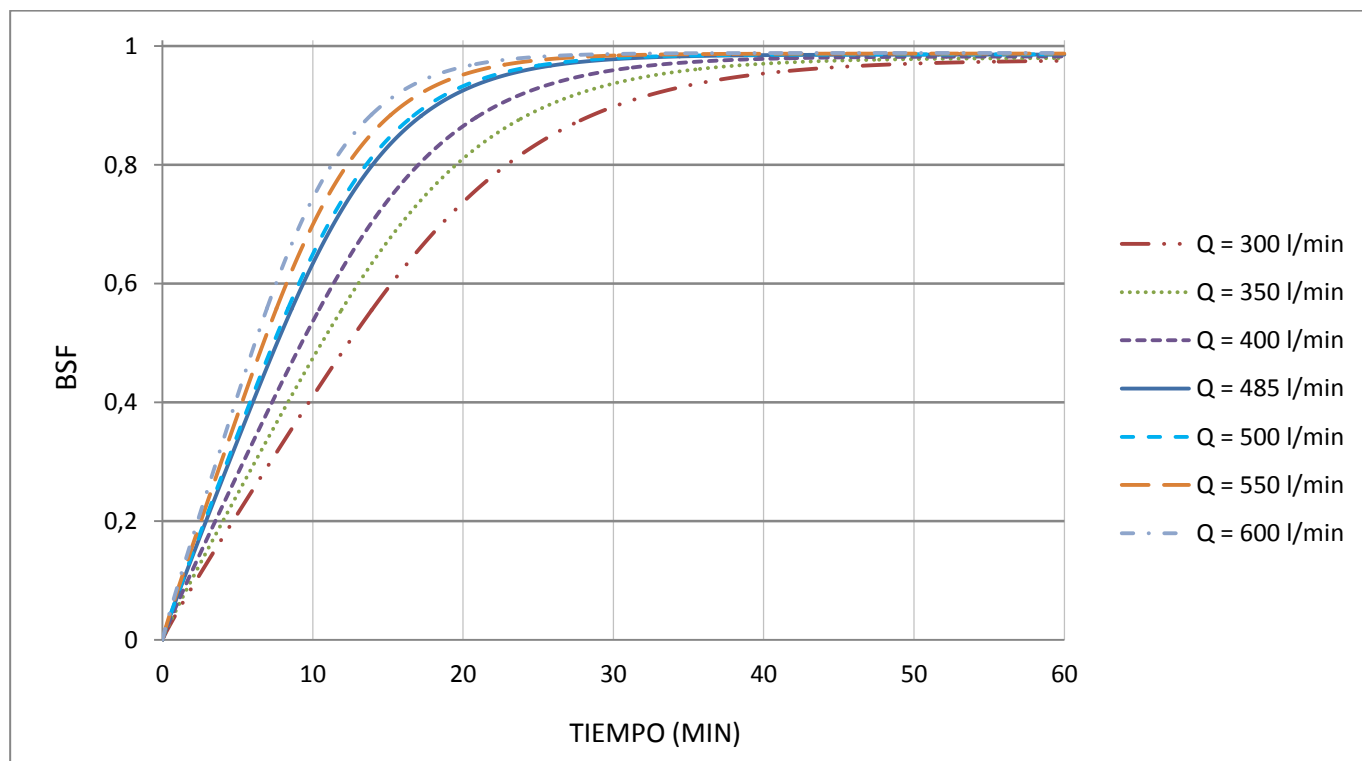


**Fig. 5.40.** *Evolución temporal del BSF del lecho durante la descarga, para  $L = 0.2 \text{ m}$  y  $Q = 485 \text{ l/min}$*

Al cabo de los 10 minutos del inicio del proceso de descarga del lecho, la curva del BSF sigue una tendencia más o menos lineal, suavizándose a partir de este instante de tiempo. Al cabo de los 30 minutos, el lecho se encuentra totalmente descargado.

A continuación se va a analizar como influye en el factor de almacenamiento la variación del caudal de aire de entrada. Para ello se representa en una misma gráfica la

variación temporal del BSF para cada uno de los caudales empleados en el punto 5.3.1 para la carga y la descarga:



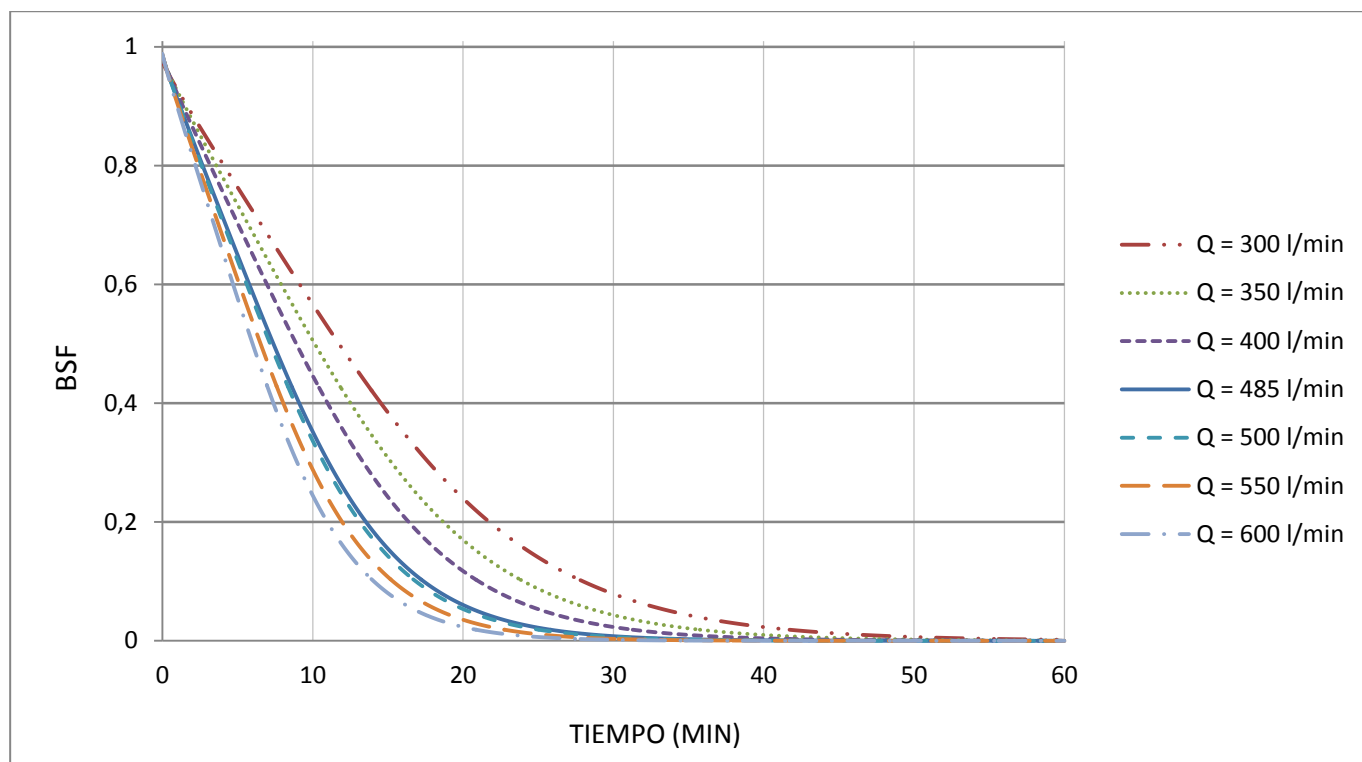
**Fig. 5.41.** Evolución temporal del BSF del lecho durante la carga, para  $L = 0.2$  m y variando  $Q$

Como ya se vio en el punto 5.3.1, a medida que se aumenta el caudal de aire de entrada, es menor el tiempo requerido para que el lecho almacene la máxima energía posible. Sirviendo de comparativa, en la siguiente tabla se muestra el tiempo que tarda cada caudal en alcanzar un BSF del 50% y del 90%:

CAUDAL (l/min)	$t(BSF=50\%)$ min	$t(BSF=90\%)$ min
300	12,3	30,2
350	10,6	25,6
400	9,25	22,2
485	7,6	18,2
500	7,4	17,6
550	6,7	16
600	6,15	14,6

**Tabla 5.3.** Tiempo en alcanzar valores del BSF del 50% y 90% variando  $Q$

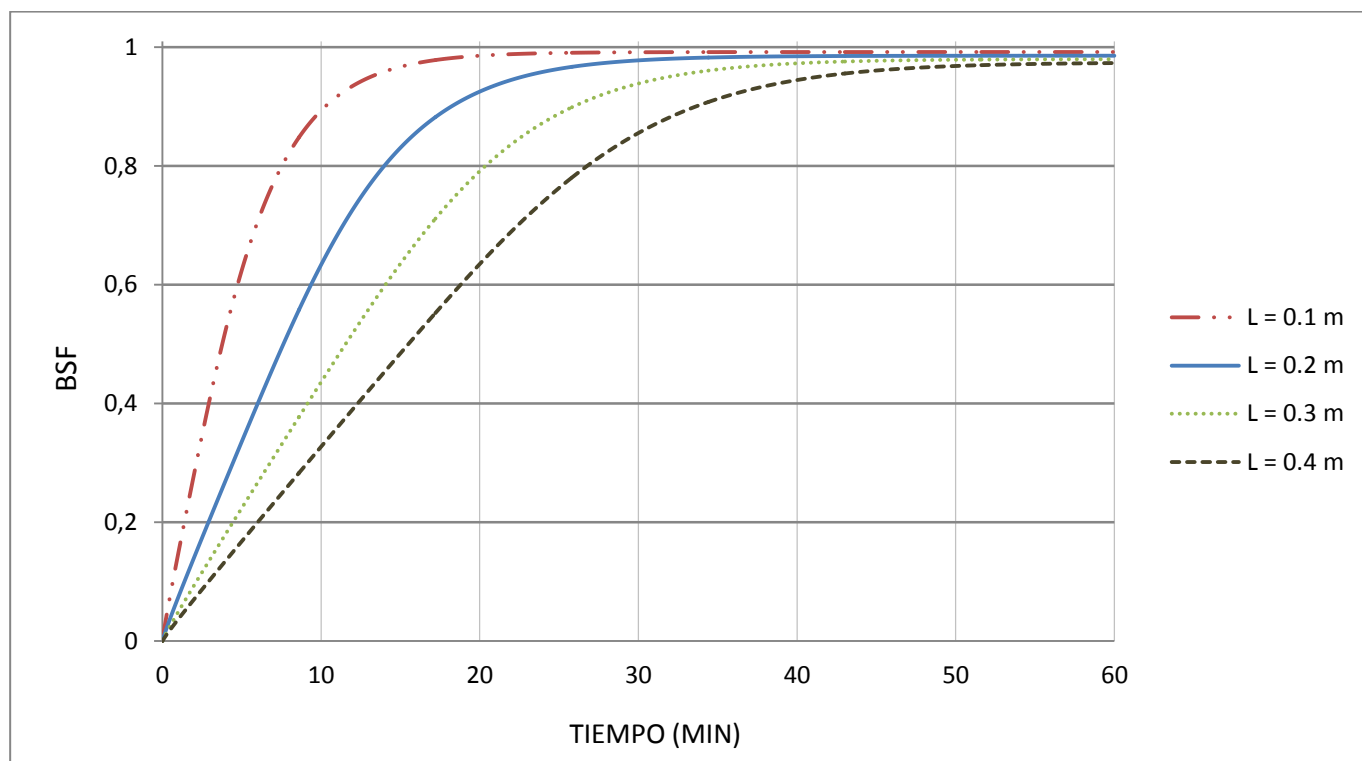
Como se puede apreciar en las curvas de la figura 5.41 la mayor cantidad de energía almacenada correspondería con el mayor de los caudales, para una misma altura del lecho. A continuación se muestra la gráfica comparativa para el proceso de descarga:



**Fig. 5.42.** Evolución temporal del BSF del lecho durante la descarga, para  $L = 0.2m$  y variando  $Q$

La evolución del BSF para la descarga para cada caudal de aire muestra como también para el mayor de los caudales se requiere un menor tiempo para recuperar la energía térmica almacenada. Al cabo de 11 minutos desde el inicio de descarga del lecho se ha logrado recuperar un 80% del calor almacenado para un caudal de 600 l/min, para el menor de los caudales, el de 300 l/min se requiere el doble de tiempo para recuperar la misma cantidad de energía almacenada.

A continuación se muestra la evolución temporal del factor BSF para los procesos de carga y descarga del lecho variando la altura del mismo:

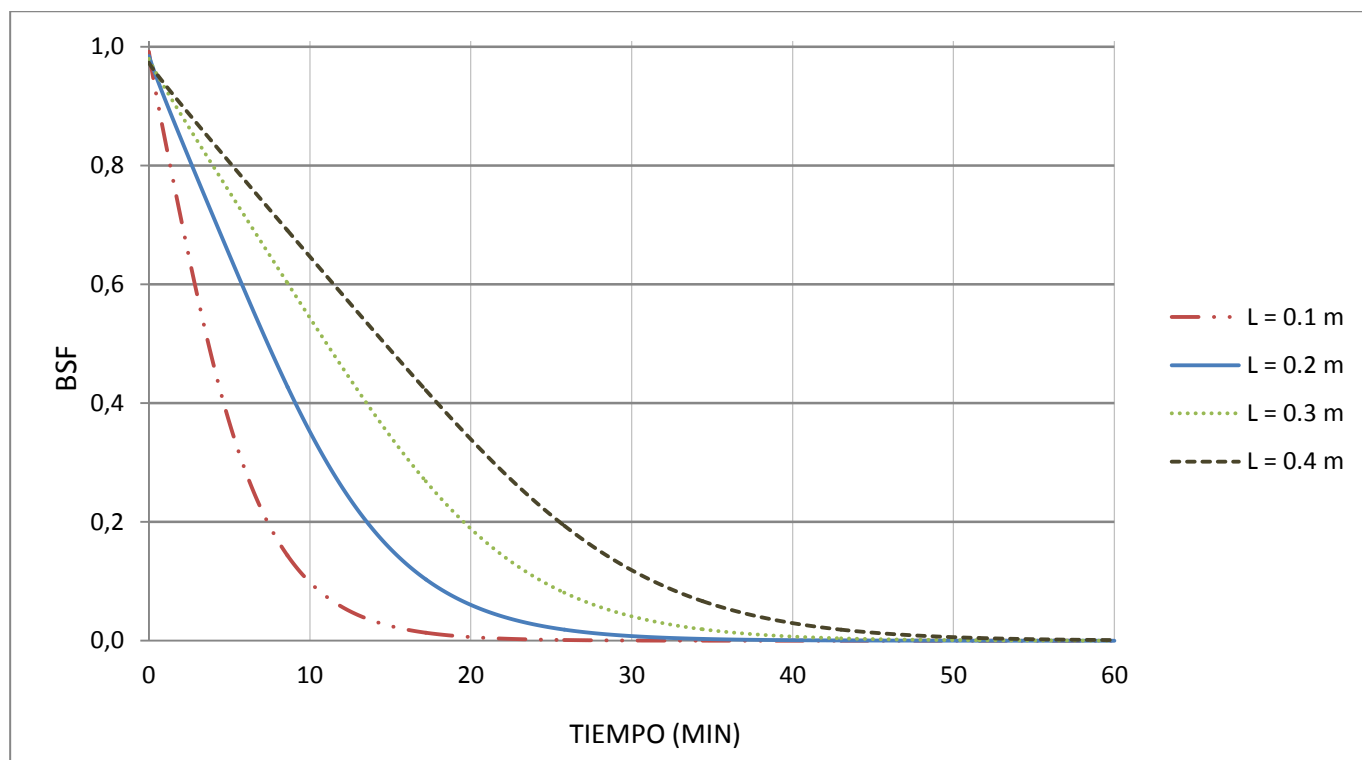


**Fig. 5.43.** Evolución temporal del BSF del lecho durante la carga, para  $Q = 485$  l/min y variando  $L$

Como era de esperar, el lecho de menor altura alcanza en un menor tiempo la capacidad máxima de almacenamiento térmico. También se puede apreciar como a medida que aumenta la altura del lecho, las pérdidas al ambiente son mayores, el lecho de altura 0.1 m logra almacenar un 99% de la energía máxima que puede almacenar, mientras que el lecho de altura 0.4 m tiene un valor de BSF igual a 97%. De nuevo en la siguiente tabla comparativa se muestran los tiempos que requiere cada altura para alcanzar un BSF igual a 50% y 90%:

ALTURA	$t(BSF=50\%)$	$t(BSF=90\%)$
	min	min
<b>0.5L</b>	3,8	10,2
<b>L</b>	7,6	18,2
<b>1.5L</b>	11,5	25,9
<b>2L</b>	15,5	33,6

**Tabla 5.4.** Tiempo en alcanzar valores del BSF del 50% y 90% variando  $Q$



**Fig. 5.44.** *Evolución temporal del BSF del lecho durante la descarga, para  $Q = 485$  l/min y variando  $L$*

En la gráfica superior se muestra la evolución temporal del BSF para cada una de las alturas del lecho empleadas en la simulación durante el proceso de descarga. Para un mismo caudal de aire, el lecho de menor altura es el que en un menor tiempo logra intercambiar todo el calor almacenado durante el proceso de carga



### 5.4.2 EFICIENCIA ( $\eta$ )

Para calcular la eficiencia del proceso de almacenamiento térmico en el lecho, que relaciona la cantidad de calor almacenada en el lecho en un cierto instante, con la entalpía del aire a la entrada del lecho (usando como referencia la temperatura inicial del lecho), se ha hecho uso de la siguiente expresión [6]:

$$\eta = \frac{\rho_s(1-\varepsilon)\frac{\pi}{4}D^2Lc_{ps}(\overline{T_b}-T_0)}{\dot{m}_a c_{pa} \sum_{t=0}^t (T_{in}-T_0)\Delta t} \quad (5.3)$$

donde todos los parámetros son conocidos, a excepción de  $\overline{T_b}$  que es la temperatura media del lecho, y  $\dot{m}_a$  que es el flujo másico de aire de entrada al lecho expresado en kg/s. En el texto de referencia de Elsayed, Megahed y El-Refaee [6] se relaciona la temperatura media del lecho con el factor de almacenamiento del lecho (*BSF*) del siguiente modo:  $\overline{T_b} = (T_{max}-T_{min})BSF + T_0$ , donde  $T_{min}$  es la temperatura mínima que alcanza el flujo de aire, que coincide con la inicial del lecho  $T_0$  que son 24 °C, y  $T_{max}$  es la máxima temperatura que alcanza el aire de entrada, que para el caso de estudio es constante e igual a la de entrada del aire  $T_{in}$ , 65 °C. Con ello, sabiendo que las temperaturas  $T_{in}$  y  $T_0$  son constantes y que pueden salir del sumatorio, la expresión 5.3 queda:

$$\eta = \frac{\rho_s(1-\varepsilon)\frac{\pi}{4}D^2Lc_{ps}((T_{max}-T_{min})BSF+T_0-T_0)}{\dot{m}_a c_{pa} (T_{in}-T_0) \sum_{t=0}^t \Delta t}$$

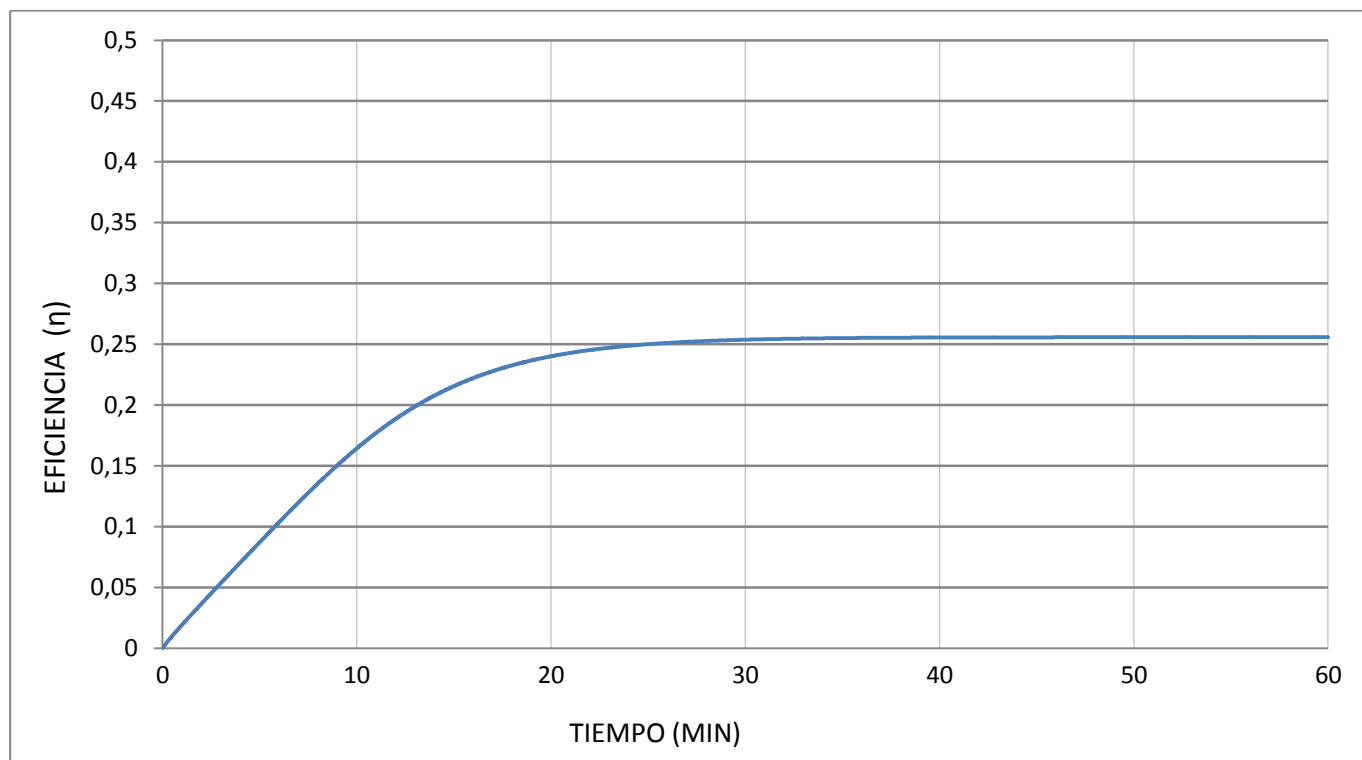
Aprovechando que en el apartado 5.4.1 se ha calculado el valor del *BSF* para cada instante de tiempo puede usarse para el cálculo de la eficiencia del lecho. Seguidamente puede calcularse la eficiencia con la siguiente expresión, ya simplificada y expresada en función del caudal de aire:

$$\eta = \frac{\rho_s(1-\varepsilon)\frac{\pi}{4}D^2Lc_{ps}((T_{max}-T_{min})BSF)}{\left(Q\rho_a/60000\right)c_{pa}(T_{in}-T_0)t} \quad (5.4)$$

La ecuación expresada para la eficiencia relaciona el calor almacenado en el lecho en un determinado instante con respecto a la cantidad de calor de entrada (en relación con la temperatura inicial del lecho) desde el comienzo hasta ese instante. Por

ello  $t$  es la cantidad de tiempo total expresada en segundos en la que el lecho se encuentra almacenando energía.

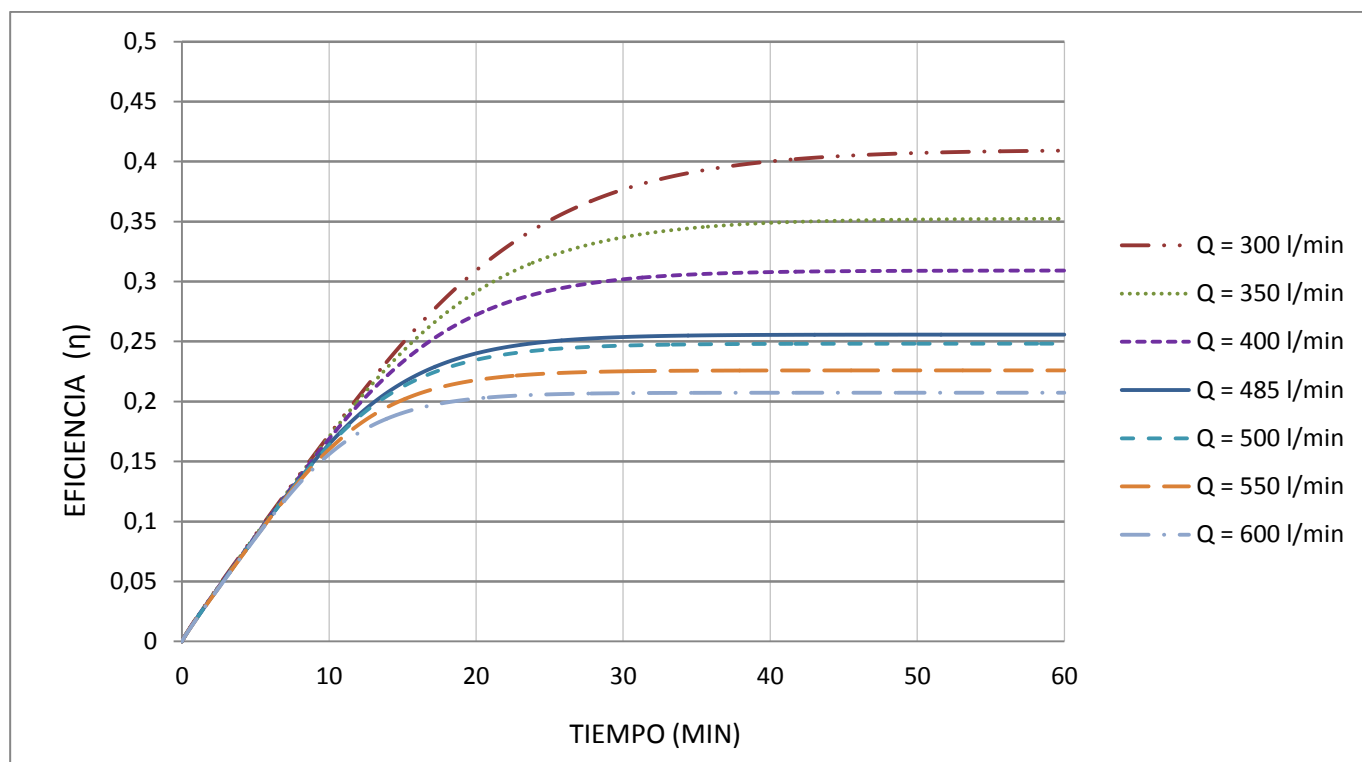
En primer lugar se muestra la evolución temporal de la eficiencia durante el proceso de carga para el lecho de referencia de altura 0.2 m con un caudal de aire de entrada de 485 l/min:



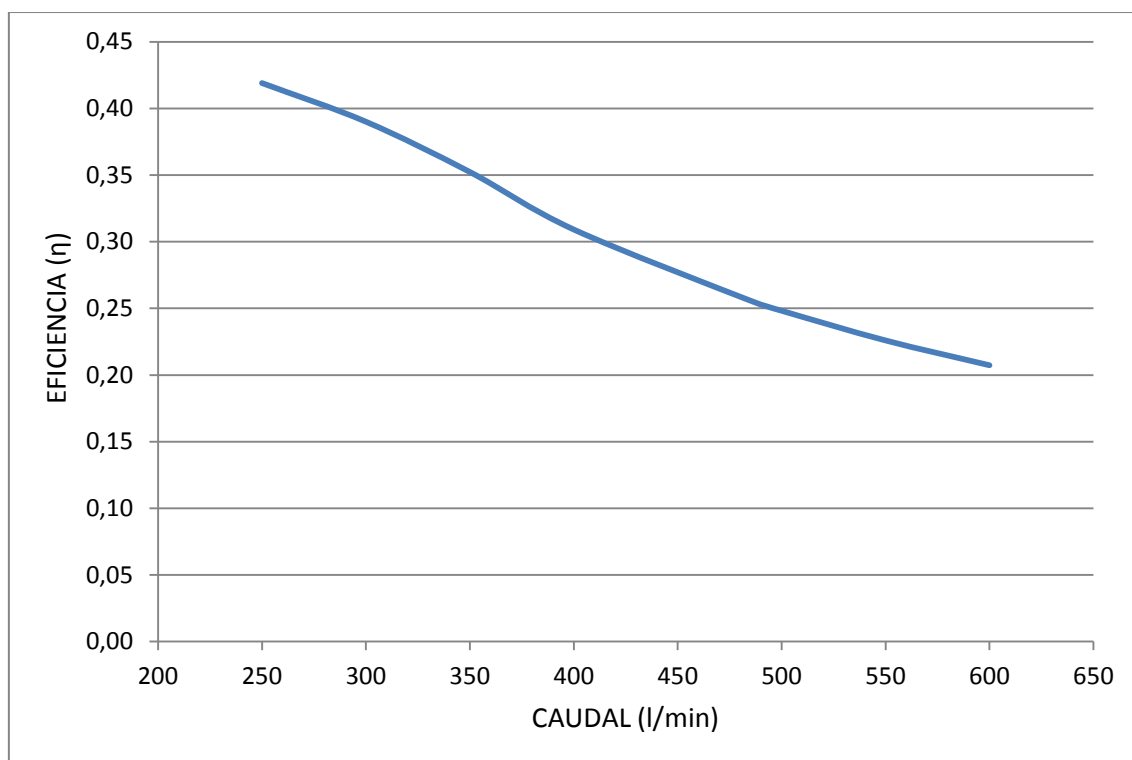
**Fig. 5.45.** *Evolución temporal de la eficiencia del lecho durante la carga, para  $Q = 485$  l/min y  $L = 0.2$  m*

Como se puede observar en la figura superior, para el lecho de referencia se consigue una eficiencia algo superior al 25%, exactamente del 25,57% según muestra la simulación, lo que quiere decir que de la totalidad de la energía térmica que entra en el lecho a través del flujo de aire caliente, tan solo un 25,57% es almacenado en la arena que forma el lecho fijo.

A continuación se muestra como influye en la eficiencia la variación de los parámetros de operación. En primer lugar se representa la variación temporal de la eficiencia para cada uno de los flujos de aire empleados en el resto de simulaciones y la evolución de la eficiencia alcanzada en régimen permanente para observar su tendencia con el caudal de aire:



**Fig. 5.46.** Evolución temporal de la eficiencia del lecho durante la carga, para  $L = 0.2$  m y variando  $Q$



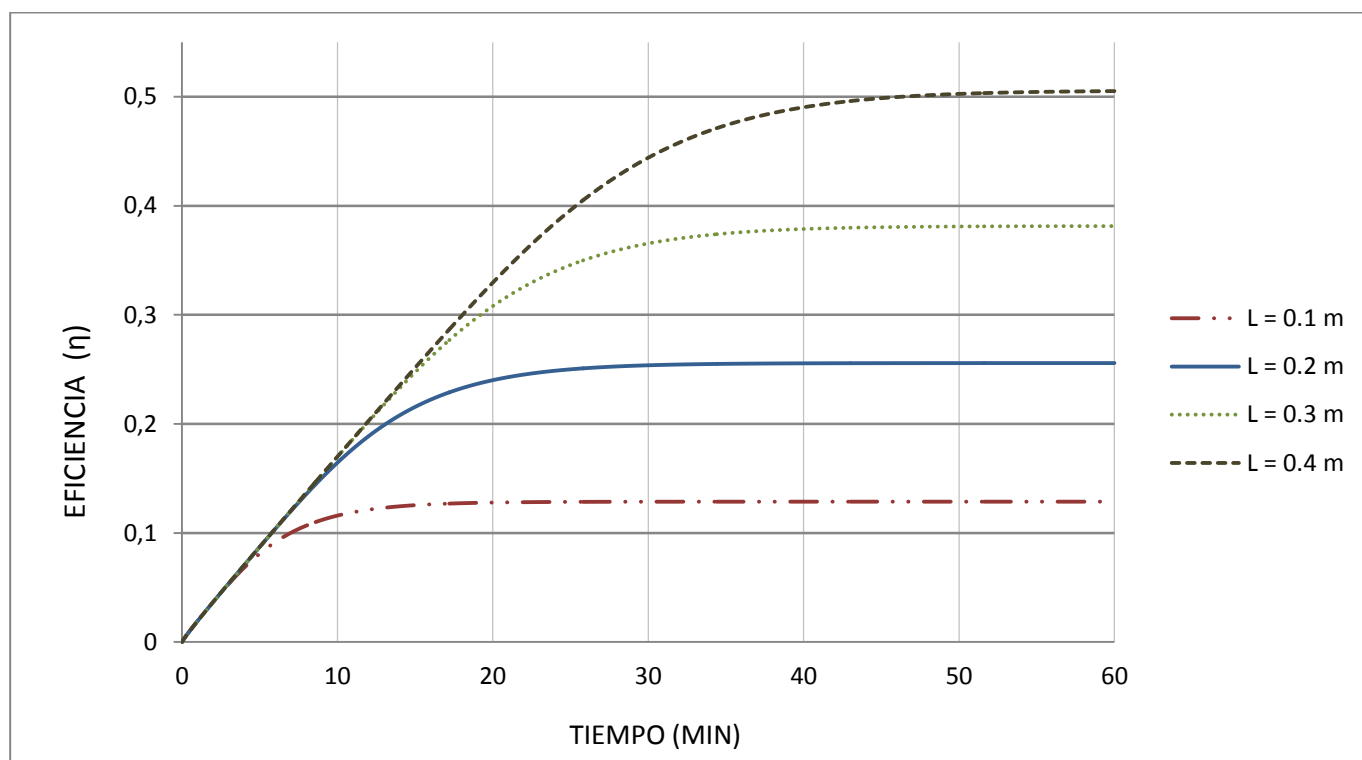
**Fig. 5.47.** Evolución de la eficiencia del lecho en régimen permanente durante la carga con el caudal, para  $L = 0.2$  m

El caudal de aire juega un papel muy importante en el proceso de almacenamiento térmico en el lecho y como se puede observar en las figuras anteriores, de él depende también la eficiencia del proceso. Para los caudales empleados, a medida que estos disminuyen la eficiencia aumenta, mostrando la simulación eficiencias superiores al 40% para caudales menores a 300 l/min e inferiores al 20% para caudales superiores a 600 l/min. En la siguiente tabla se muestran los valores representados en la figura 5.47:

CAUDAL (l/min)	EFICIENCIA $\eta$
300	0,4
350	0,35
400	0,31
485	0,255
500	0,248
550	0,225
600	0,207

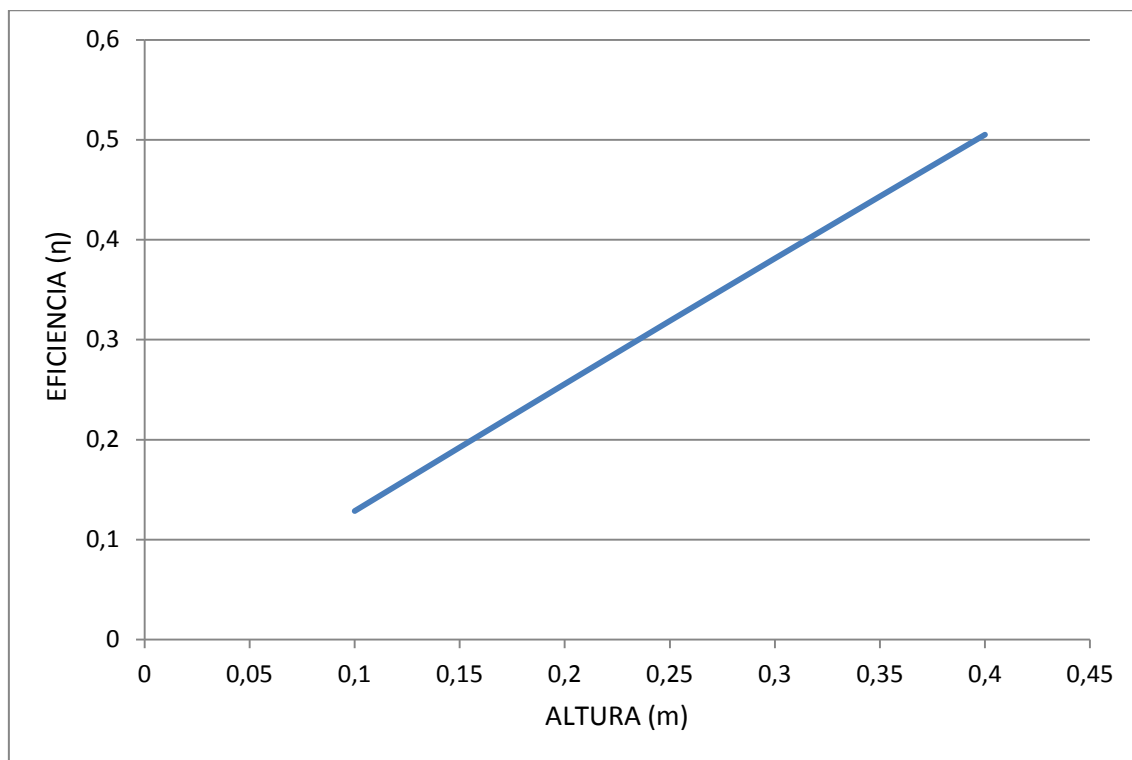
**Tabla 5.5.** Eficiencia para cada caudal ( $Q$ )

Seguidamente se va a analizar la evolución temporal de la eficiencia cuando varía la altura del lecho:



**Fig. 5.48.** Evolución temporal de la eficiencia del lecho durante la carga, para  $Q = 485$  l/min y variando  $L$

y por último se representa la tendencia en régimen permanente de la evolución de la eficiencia con cada una de las alturas simuladas:



**Fig. 5.49.** *Evolución de la eficiencia del lecho en régimen permanente durante la carga con la altura, para  $Q = 485$  l/min*

En la figura 5.49 puede verse como la evolución de la eficiencia en régimen permanente a medida que aumenta la altura es más lineal que como ocurría con el caudal. Para una altura del lecho el doble de la de referencia, pueden alcanzarse eficiencias superiores al 50%. En la siguiente tabla se muestran las eficiencias conseguidas para cada una de las alturas:

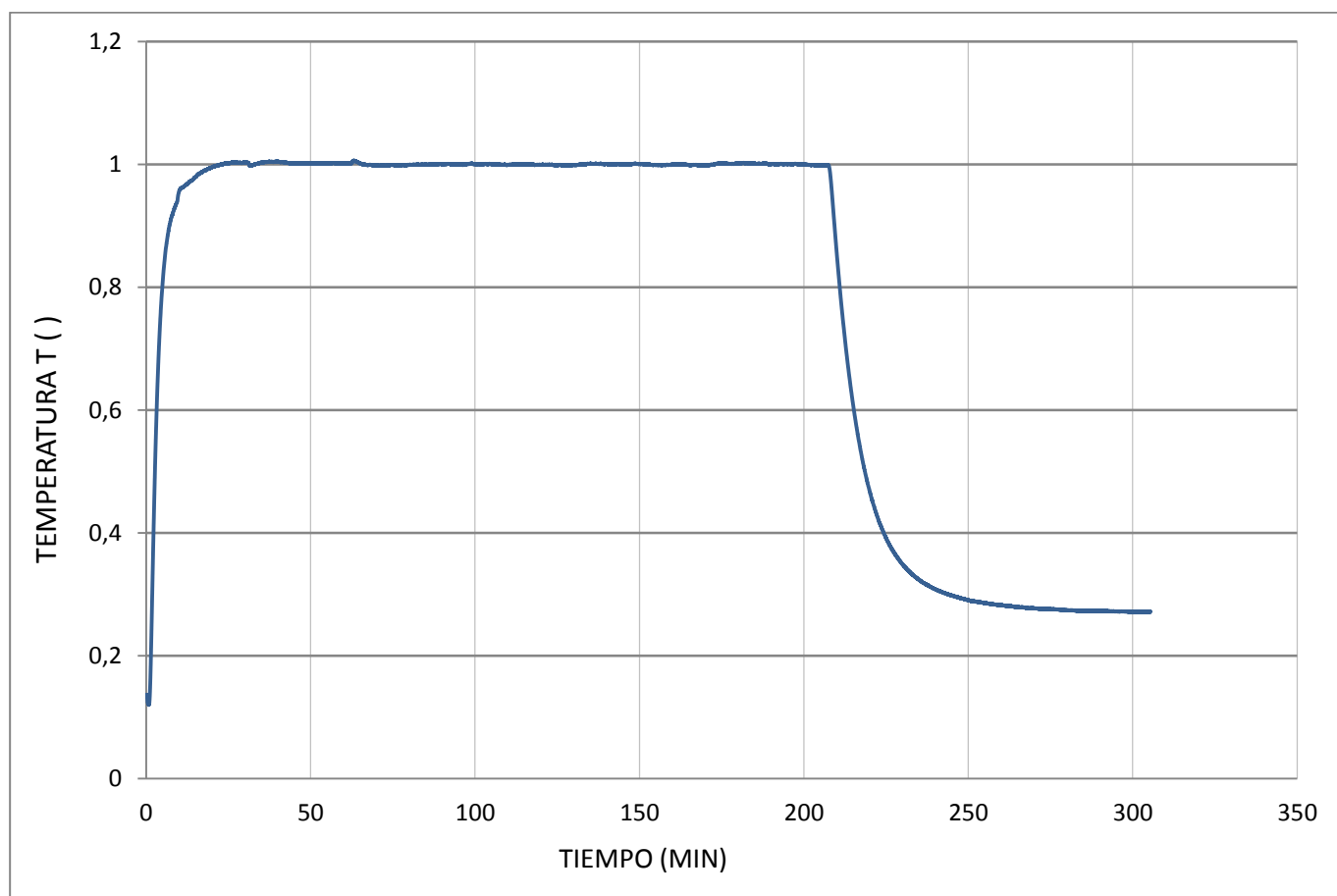
ALTURA	EFICIENCIA $\eta$
0.5L	0,128
L	0,255
1.5L	0,38
2L	0,5

**Tabla 5.6.** *Eficiencia para cada altura (L)*

## 5.5 COMPARACIÓN DE LOS RESULTADOS EMPÍRICOS Y SIMULADOS

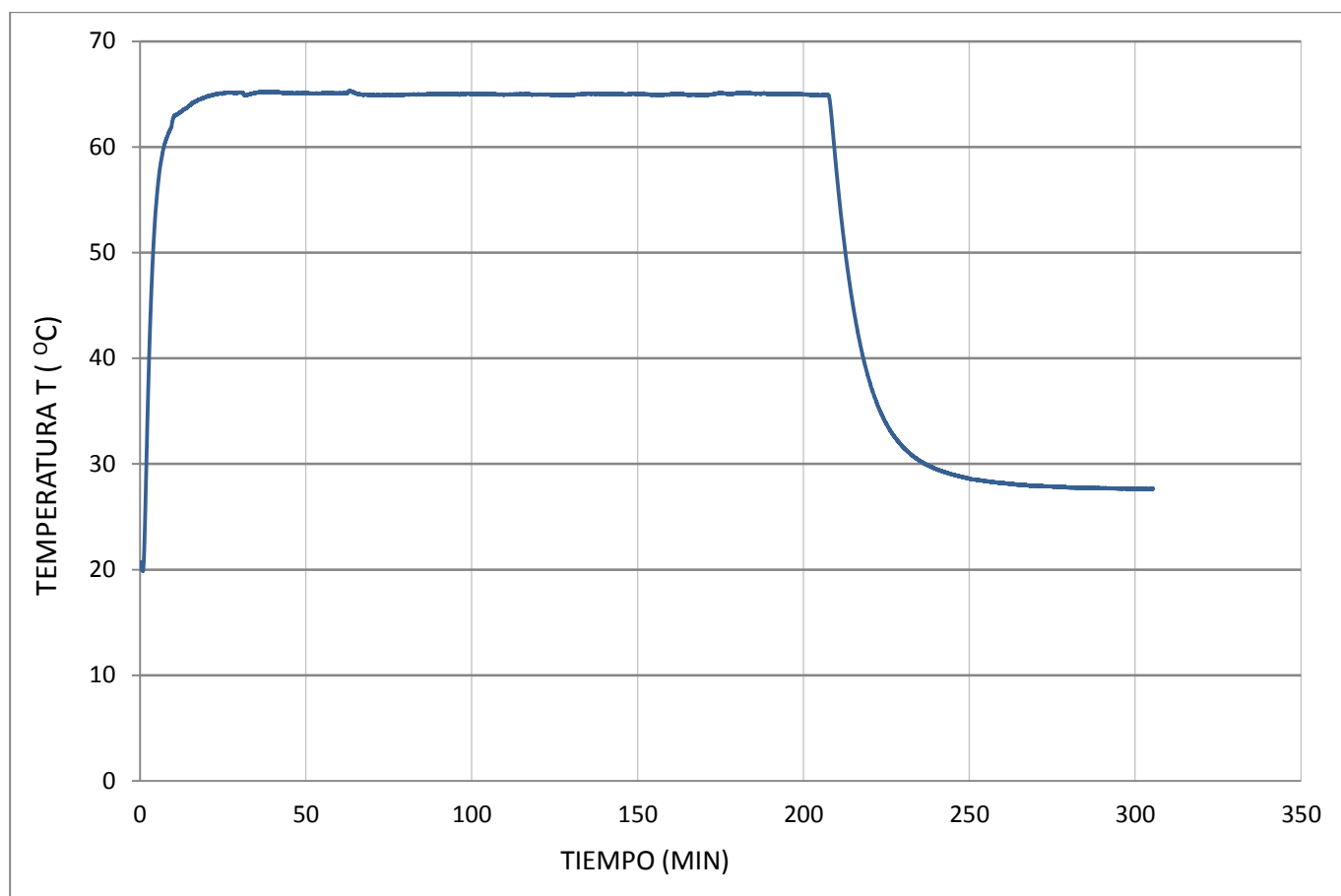
Para validar el modelo creado y comprobar en que medida los resultados obtenidos pueden asemejarse a la realidad, se van a comparar los resultados de los experimentos realizados por el departamento de Ingeniería Térmica y de Fluidos de la Universidad Carlos III con los resultados que arroja el modelo.

En el ensayo realizado en el laboratorio se empleó un lecho con las características y geometrías ya definidas en el apartado 5.1, de altura 0.2 m y con un caudal de aire de entrada de 485 l/min, sin embargo la temperatura del aire de entrada no era constante como se ha venido resolviendo hasta el momento, sino que se empleó un perfil de temperaturas como el que se muestra a continuación:



**Fig. 5.50.** Perfil de temperatura adimensional del aire de entrada al lecho

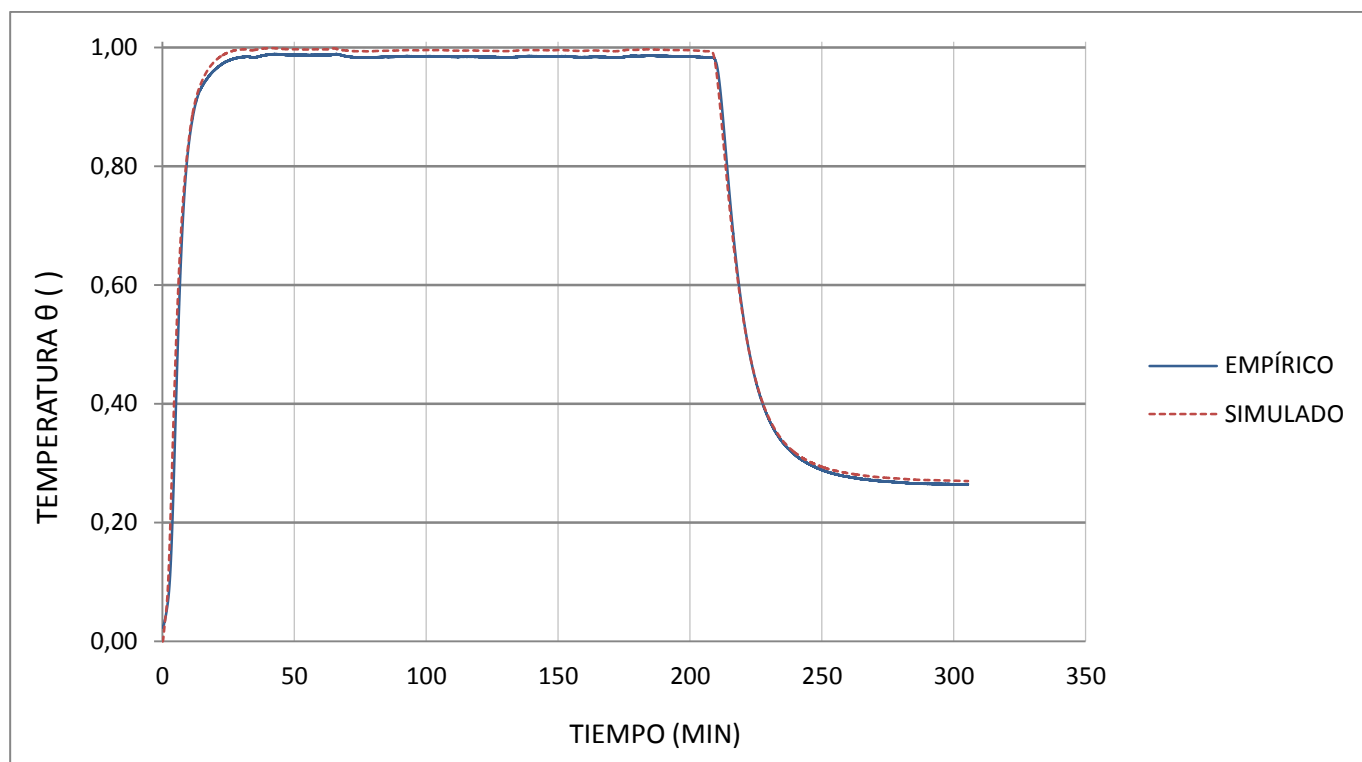
También puede representarse la evolución temporal de la temperatura del flujo de aire de forma dimensional, que quizás resulta más intuitiva:



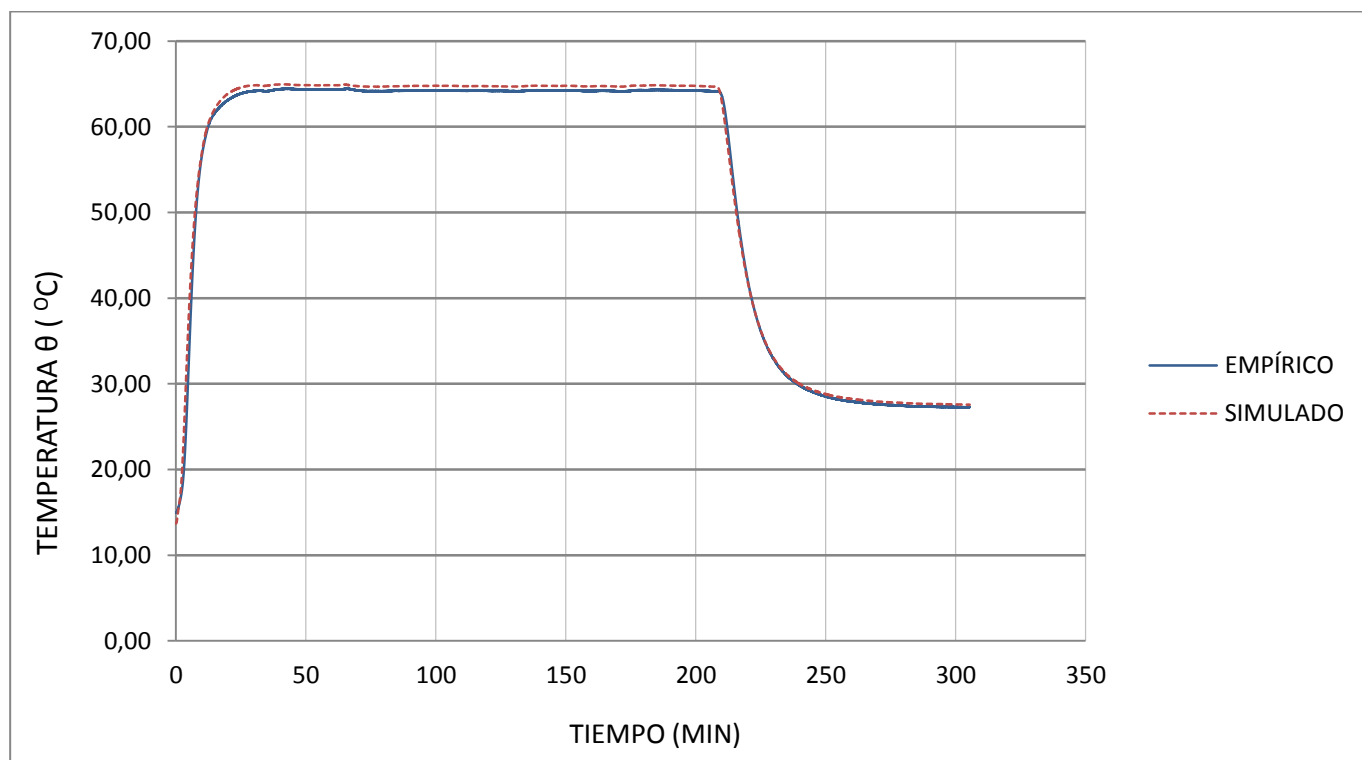
**Fig. 5.51.** *Perfil de temperatura dimensional del aire de entrada al lecho*

La mínima temperatura del aire de entrada al lecho es de 19.86 °C, y la máxima es de 65.31°C.

A continuación se muestra la evolución temporal de la temperatura del lecho para cuatro alturas diferentes del mismo situadas a 2.5 cm, 7.5 cm, 12.5 cm y 17.5 cm. Se comparan los datos experimentales o empíricos con los teóricos obtenidos del modelo para las cuatro alturas anteriores, tanto en dimensional como adimensional:

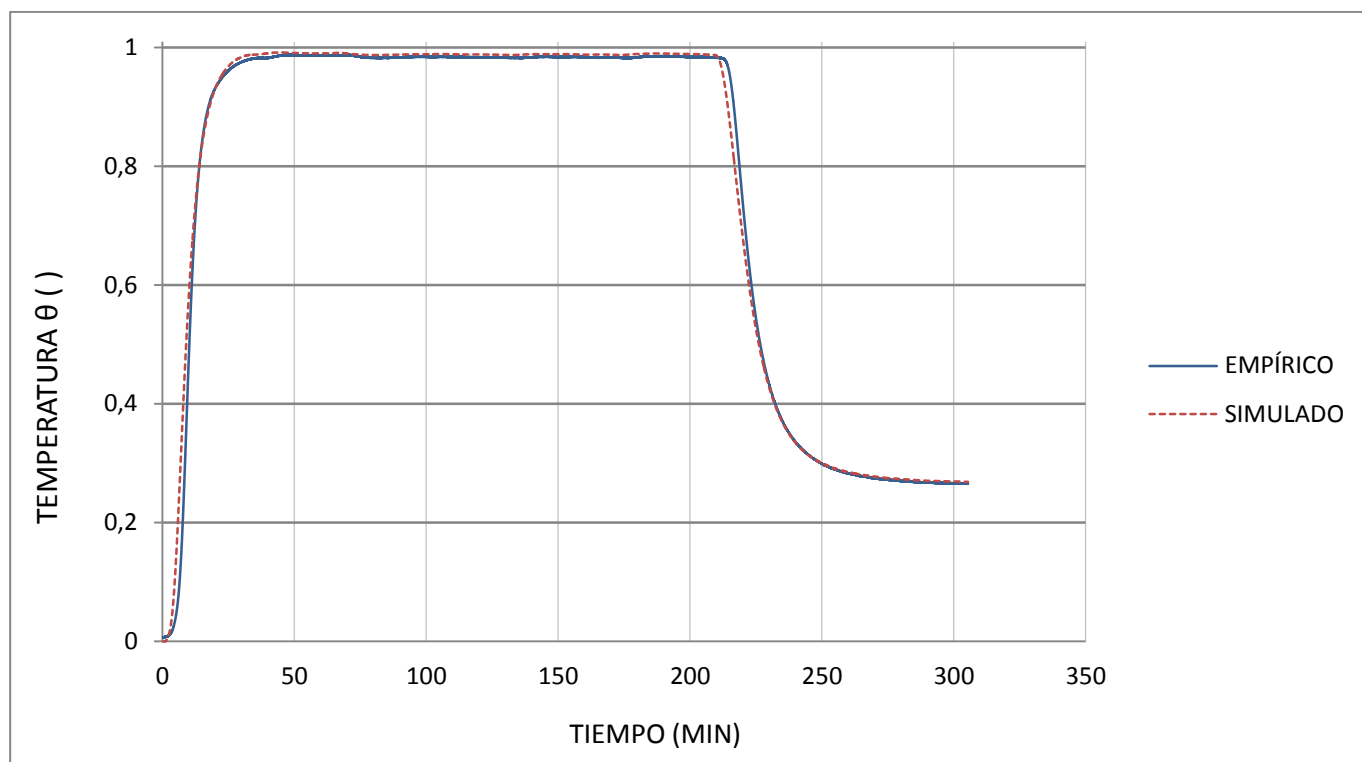


**Fig. 5.52.** Comparación de la evolución adimensional de la temperatura empírica con la simulada para  $x = 2.5 \text{ cm}$

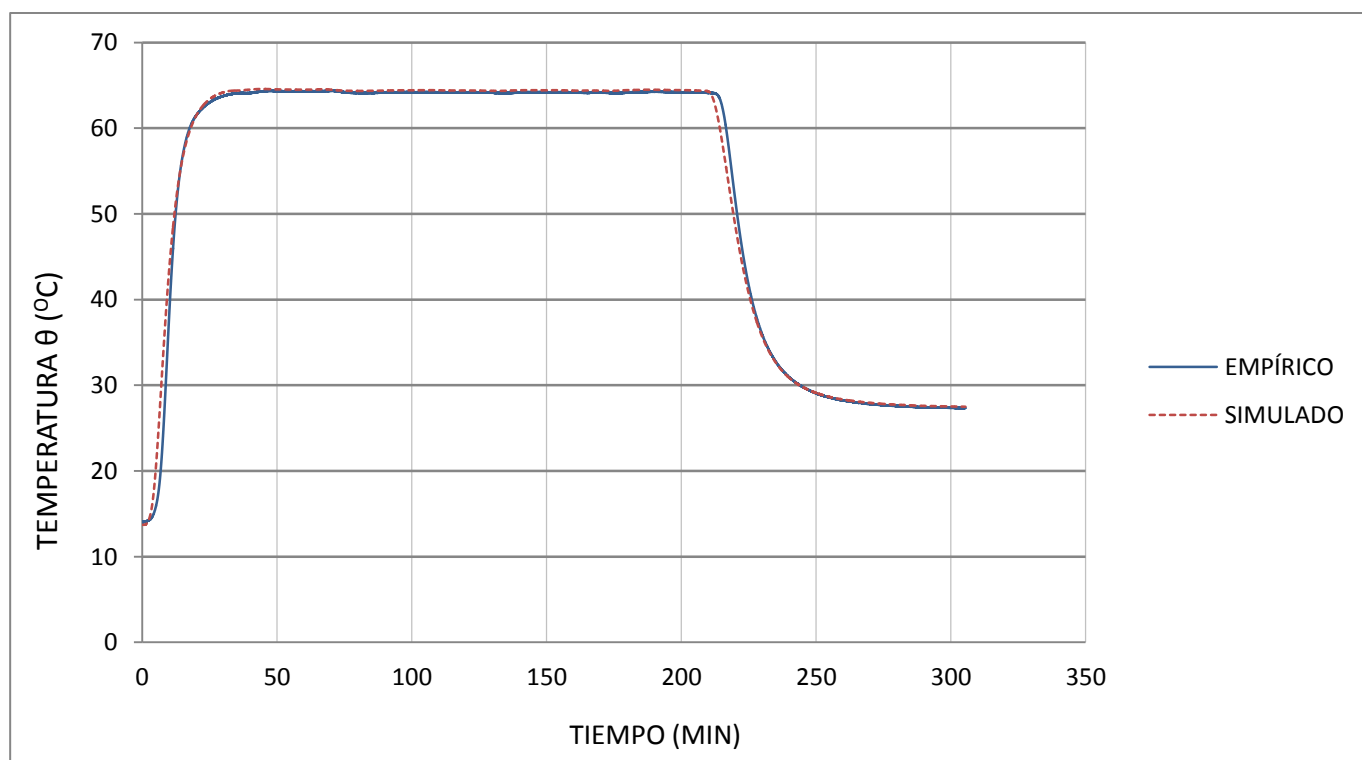


**Fig. 5.53.** Comparación de la evolución dimensional de la temperatura empírica con la simulada para  $x = 2.5 \text{ cm}$

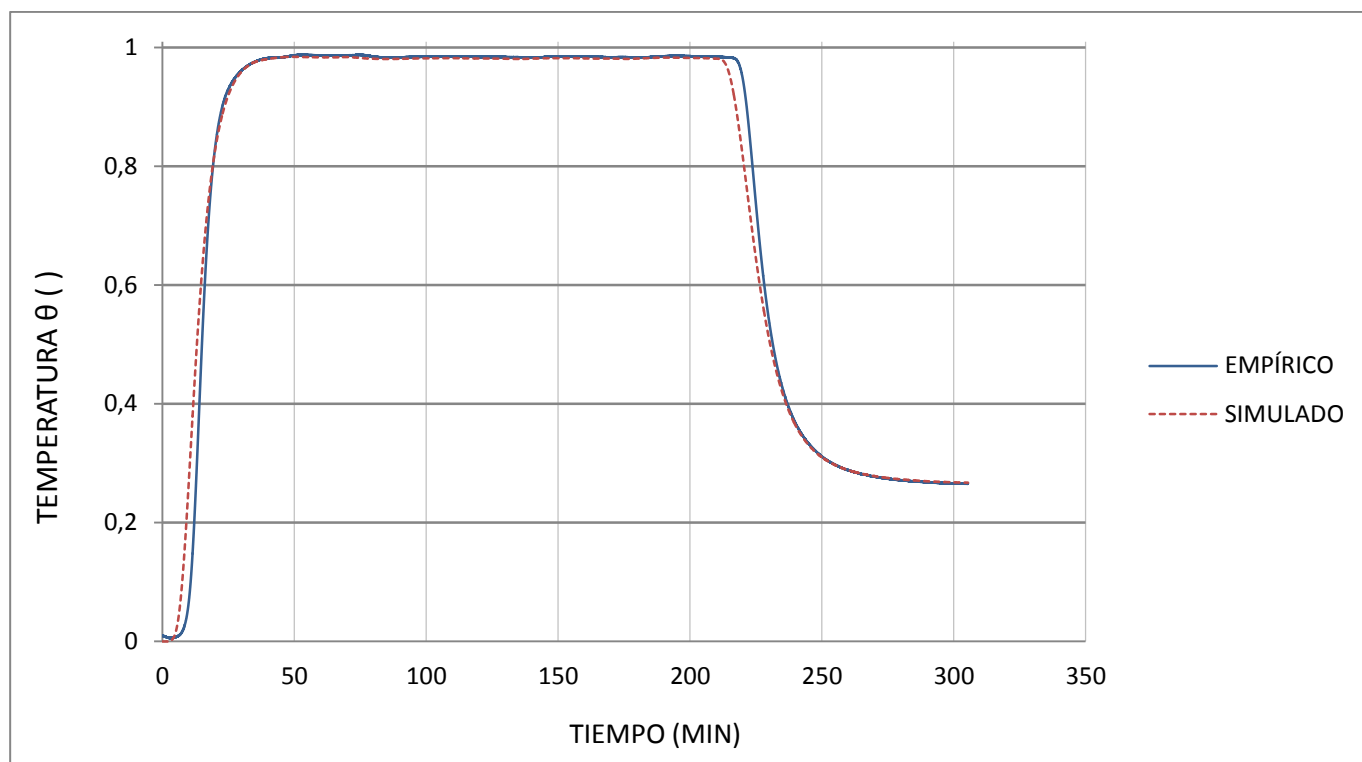




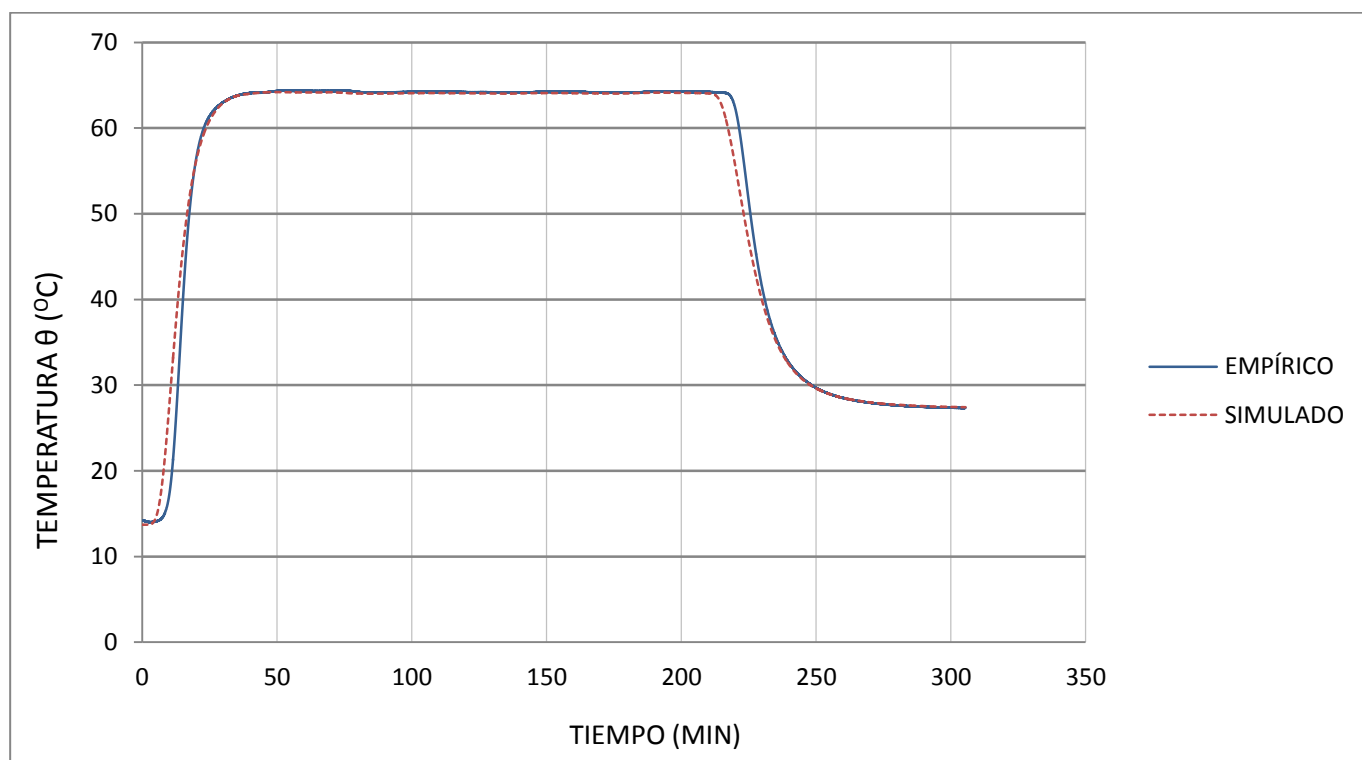
**Fig. 5.54.** Comparación de la evolución adimensional de la temperatura empírica con la simulada para  $x = 7.5 \text{ cm}$



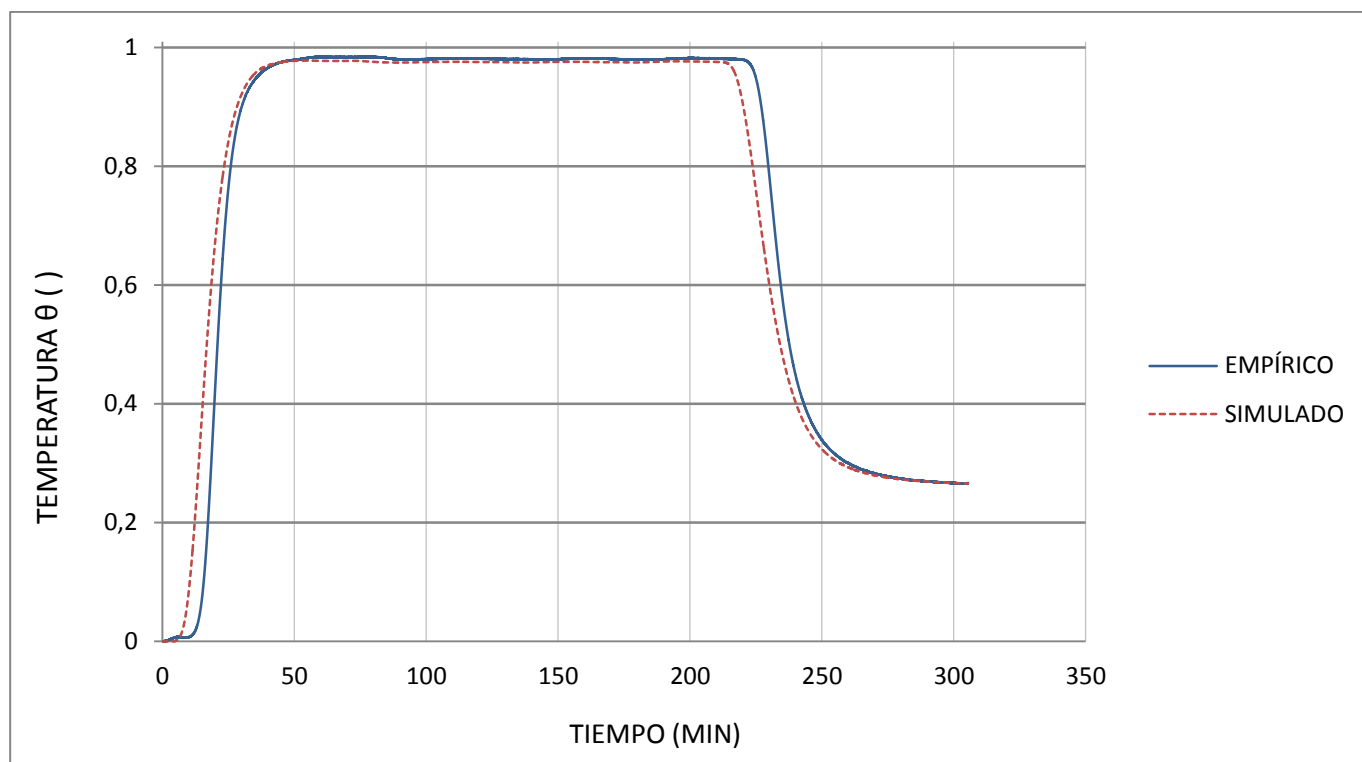
**Fig. 5.55.** Comparación de la evolución dimensional de la temperatura empírica con la simulada para  $x = 7.5 \text{ cm}$



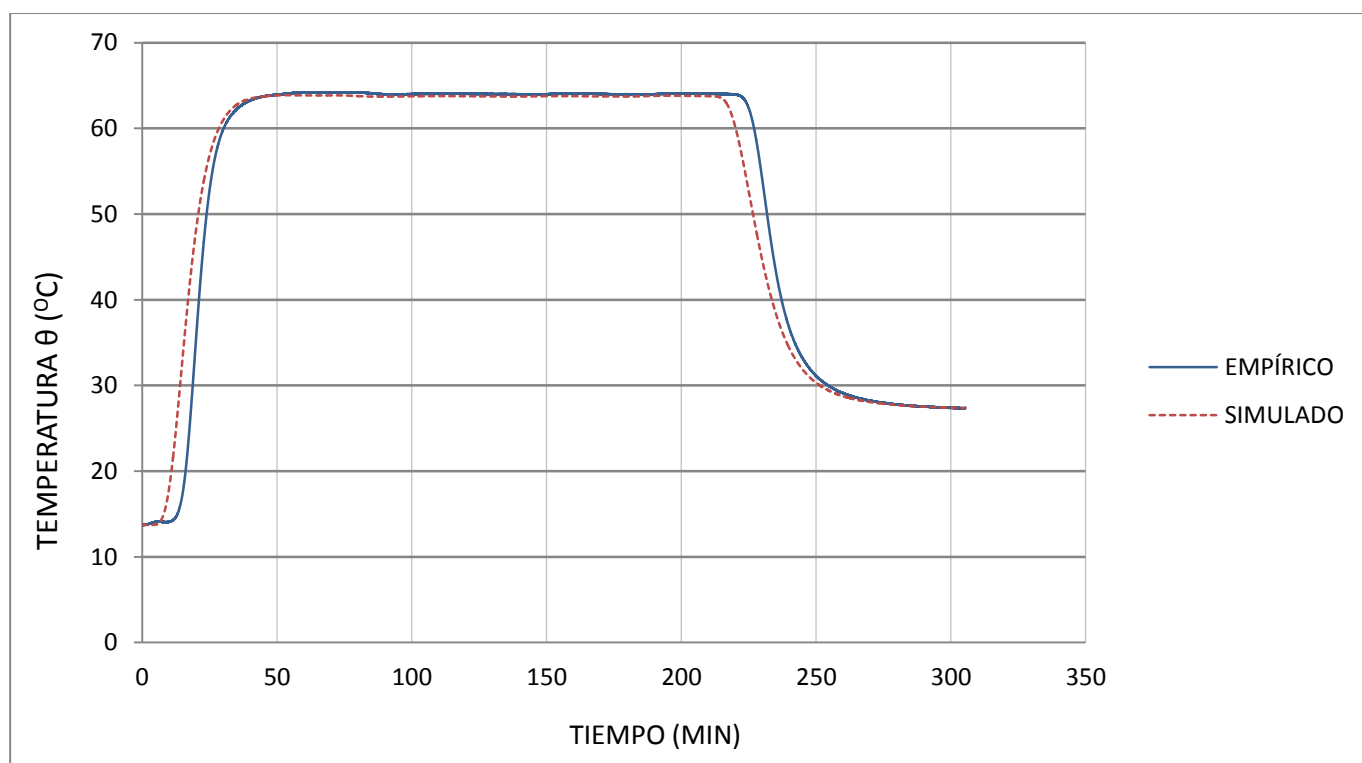
**Fig. 5.56.** Comparación de la evolución adimensional de la temperatura empírica con la simulada para  $x = 12.5$  cm



**Fig. 5.57.** Comparación de la evolución dimensional de la temperatura empírica con la simulada para  $x = 12.5$  cm



**Fig. 5.58.** Comparación de la evolución adimensional de la temperatura empírica con la simulada para  $x = 17.5$  cm



**Fig. 5.59.** Comparación de la evolución dimensional de la temperatura empírica con la simulada para  $x = 17.5$  cm



Para los dos nodos situados a unas alturas de 2.5 cm y 7.5 cm, se puede observar en las figuras que comparan la evolución de la temperatura experimental con la obtenida de las simulaciones para estas alturas, como el modelo se ajusta con bastante exactitud a la curva empírica, tanto al comienzo del proceso de calentamiento como en el régimen permanente y en el posterior enfriamiento del lecho. Sin embargo para las zonas del lecho situadas a una altura superior, como se muestra en las cuatro últimas figuras para  $x = 12.5$  cm y  $x = 17.5$  cm, existen diferencias superiores entre ambos resultados, sobre todo en los instantes referidos al transitorio de calentamiento y enfriamiento del lecho fijo, aunque tanto la temperatura consigna en régimen permanente como el tiempo que tardan en alcanzarla ambas gráficas, la experimental y la simulada, difieren poco. Las diferencias pueden deberse a que en los experimentos el material del que está construido el lecho almacena una cantidad de calor no despreciable y necesita un cierto tiempo para calentarse, lo que no ha sido tenido en las simulaciones.

## **6. CONCLUSIONES Y ESTUDIOS FUTUROS**

## CONCLUSIONES

Se ha tratado de modelar matemáticamente el proceso de almacenamiento térmico en un lecho fijo y la evolución temporal del calor sensible en el mismo a lo largo de los procesos de carga y descarga. Para ello se han tenido que consultar diferentes textos para conocer los procesos de intercambio de calor que ocurren en el lecho, fijar de forma correcta las condiciones de contorno o determinar las expresiones que permiten calcular los diferentes parámetros, como coeficientes de transferencia de calor, de conductividad térmica efectiva, las eficiencias o los factores de almacenamiento del lecho.

En cuanto a las conclusiones destacar el potencial del método de diferencias finitas, se trata de un método intuitivo, fácil de entender y de implementar mediante cualquier software de programación numérica. Ello junto con el método matricial expuesto, permite la resolución de cualquier modelo representado mediante ecuaciones diferenciales que traten de explicar cualquier proceso físico. Para ello se hace de vital importancia la correcta elección tanto del paso temporal como el espacial.

Se ha demostrado la importancia de la correcta elección tanto de la altura del lecho como del caudal del aire de entrada cuya influencia puede conocerse a través del cálculo de parámetros como la eficiencia o el factor de almacenamiento del lecho.

Las comparaciones mostradas al final del capítulo 5 entre los resultados empíricos con los procedentes de las simulaciones, muestran como el modelo se ajusta de forma correcta con algunas diferencias a lo que ocurre en un proceso real de almacenamiento térmico del lecho, tanto en la carga como en la descarga. Indicar que cuando se realizaron las medidas experimentales, el lecho tenía una cierta inercia térmica debido a medidas realizadas con anterioridad. Aunque como ya se dijo, modelar de forma exacta todos los procesos físicos que tiene lugar en el lecho es complejo.

Por último destacar la facilidad encontrada a la hora implementar el método de diferencias finitas y toda la programación necesaria en Matlab, a través del cual se pueden controlar todos los parámetros de la simulación a diferencia de otros software que son algo más opacos en este sentido.



## ESTUDIOS FUTUROS

En cuanto a posibles mejoras futuras, podría incluirse la conducción en dirección radial en el lecho, para lo cual habría que reformular el modelo y comprobar así si se reducen las diferencias con los resultados empíricos, así como incluir el estudio de almacenamiento de calor latente, es decir, incluir materiales con cambio de fase para el almacenamiento de energía térmica cuyo uso está aumentando en los últimos años, pues ofrecen una mayor capacidad de almacenamiento.

Por otra parte el modelo ya creado permitiría de forma fácil medir la influencia que tendría en el proceso de almacenamiento térmico en el lecho la variación de otros parámetros importantes del lecho, como son la porosidad, el material de las partículas de la fase sólida. Ello proporcionaría una herramienta muy importante en el supuesto de una fase previa de diseño de un lecho fijo real para una determinada aplicación y permitiría la correcta elección de estos parámetros tan importantes para el almacenamiento térmico en un lecho junto con los parámetros ya estudiados de altura y caudal de aire.

También sería interesante poder realizar el estudio sobre un software de propósito, dedicado a las diferencias finitas, para así poder validar la exactitud del modelo cuya programación se ha realizado en Matlab.

## **BIBLIOGRAFIA**





## BIBLIOGRAFIA

- [1] Rady, M., 2009. "Granular phase change materials for thermal energy storage: experiments and numerical simulations". *Applied Thermal Engineering*, vol.29, pp. 3149-3159.
- [2] N. Wakao, S. Kaguei, 1982. "Heat and mass transfer in packed beds". Gordon and Braech, New York.
- [3] T.R. Galloway, B.H. Sage, 1970, "A model of the mechanism of transport in packed distended and fluidised beds". *Chemical Engineering Science* 25, 495.
- [4] Ismail, K.A.R., Stuginsky R., 1999. "A parametric study on possible fixed bed models for pcm and sensible heat storage". *Applied Thermal Engineering*, vol. 19, pp. 757-788.
- [5] Frank P. Incropera, David P. De Witt, 1999. "Fundamentos de transferencia de calor". Cuarta Edición, Prentice Hall, Méjico.
- [6] M. M. Elsayed, I. E. Megahed, M. M. El-Refae, 1987. "Experimental testing of fluidized bed thermal storage". *Solar & Wind Technology* Vol. 5, No. I, pp. 15-25.
- [7] María A. Izquierdo-Barrientos, Celia Sobrino, José A. Almendros-Ibáñez, 2012. "Experimental study of a fixed and fluidized bed with PCM".
- [8] Donald E. Beasley, Johan A. Clark, 1984. "Transient response of a packed bed for thermal energy storage". *Pergamon Press Ltd* Vol. 27, No. 9, pp 1659-1669.
- [9] Markus Hänchen, Sarah Brückner, Aldo Steinfeld, 2010. "High-temperature thermal storage using a packed bed of rocks- Heat transfer analysis and experimental validation". *Applied Thermal Engineering*, vol. 31, pp. 1798-1806.

# **ANEXO**

En el presente anexo se incluyen los códigos desarrollados con la aplicación Matlab, para lo cual se ha hecho uso de la versión R2011b (7.13.0.564).

Se han desarrollado dos programas, un script denominado *lecho.m* que contiene todos los datos referentes a la geometría, características físicas y térmicas del lecho. También en él se calculan los números adimensionales de Biot y Fourier para el sólido y el fluido así como todos los parámetros necesarios para la aplicación de las diferencias finitas, pasos espaciales y temporales.

El script anterior, invoca a la otra función creada, *funcion.m*, en la cual a través del método matricial se resuelve el modelo mediante el método de diferencias finitas; para ello previamente se crean todos los vectores y matrices necesarias. Esta función devuelve una matriz que contiene el valor de la temperatura para cada nodo del lecho y a lo largo de cada instante de tiempo, para la carga y descarga.

## LECHO.M

```
clear all
clc
%DATOS DEL LECHO:
vectorQ=[300 350 400 485 500 550 600];
vectorL=[1 0.5 1.5 2];
Q = vectorQ(4); %caudal de aire (l/min)
d_lecho= 0.2; %diametro del lecho (m)
L=d_lecho*vectorL(1); %altura del lecho (m)
d_p=0.6e-3; %diametro de las particulas (m)
epsilon_s=0.4; %porosidad
a_p=6*(1-epsilon_s)/d_p; %area superficial de las particulas por
unidad de volumen del lecho
Tin=65; %temperature de entrada del aire (°C)
T0=24; %temperatura inicial del lecho (°C)
Tmax=65;
Tmin=T0;
vectorT(1)=T0;vectorT(2)=Tin;vectorT(3)=Tmax;
area=pi*((d_lecho/2)^2); %area transversal del lecho

%DATOS DEL SOLIDO:
K_S=1.28; %conductividad termica de la arena (W/m·K)
rho_S=2600; %densidad de la arena (kg/m3)
cp_S=920; %calor especifico de la arena (J/kg·k)

%DATOS DEL FLUIDO:
K_F=0.02624; %conductividad termica del aire (W/m·K)
rho_F=1.18; %densidad del aire(kg/m^3)
cp_F=1012; %calor especifico del aire (J/kg·k)
mud_F = 1.8462*10^-5;%viscosidad dinámica kg/m·s = Pa·s =(kg/m·s^2)*s
muc_F = mud_F/rho_F;%viscosidad cinematica=visc.dinamica/densidad
m^2/s

%CALCULO DE LAS VELOCIDADES DEL FLUIDO:
Us=Q/(60*1000*area); %velocidad superficial (m/s)
```

```
u=Us/epsilon_s; %velocidad intersticial (m/s)
%CALCULO DE H: Coeficiente de transferencia de calor entre el fluido y
las partículas **Galloway y Sage [3]**
Re_d=(Us*d_p)/mu_F; %numero de Reynolds
Pr=cp_F*mu_F/K_F; %numero de Prandtl
c1=2.031;c2=0.049;
Nu=2+c1*(Re_d^0.5)*(Pr^(1/3))+c2*Re_d*(Pr^0.5); %numero de Nusselt
h=Nu*K_F/d_p; %el valor del nusselt para el diámetro de las partículas

%PERDIDAS DE CALOR EN LA PARED
%Pared del lecho: acero inoxidable AISI 304 propiedades a 300K
(Incropera)
d_lecho_ext = 0.204;%diámetro exterior del lecho
k_w = 14.9; %conductividad termica del acero (W/m·K)
rho_w = 7900; %densidad del acero(kg/m^3)
cp_w = 477; %calor especifico del acero (J/kg·K)
%Aislante: glass fiber coated duct liner (Incropera)
d_iso=0.234; %diámetro exterior del aislante
k_iso=0.038; %conductividad termica del aislante (W/m·K)
rho_iso=32; %densidad del aislante(kg/m^3)
cp_iso=835; %calor especifico del aislante (J/kg·K)
%coeficiente de transferencia de calor entre la pared del lecho y el
fluido: **Ismail y Stuginsky [4]**
h_w=(K_F/(d_p))*(2.576*(Re_d^(1/3))*(Pr^(1/3))+0.0936*(Re_d^0.8)*(Pr^0
.4));
%Coeficiente de transferencia de calor en el exterior del lecho,
conveccion natural en placa vertical (Incropera).
g=9.81; %constante de la gravedad
beta=1/Tmin;
Gr_L=g*beta*(5)*(L^3)/(mu_F^2);%Grashof supuesto una diferencia de
temperatura entre la superficie del aislante y el aire ambiente de 5°C
aspect=d_lecho/L;
cr_placa=35/(Gr_L^0.25);%si aspect>cr_placa se puede usar la
correlacion de placa vertical para cilindro vertical
Ra_L=Gr_L*Pr; %numero de Rayleigh
Nu_L=0.68+(0.670*Ra_L^(1/4))/((1+(0.492/Pr)^(9/16))^4/9);
h_iso=Nu_L*K_F/L;
U=1/(1/h_w+(d_lecho*log(d_lecho_ext/d_lecho))/(2*k_w)+(d_lecho*log(d_i
so/d_lecho_ext))/(2*k_iso)+d_lecho/(h_iso*d_iso));%coeficiente de
transferencia referido al Área del lecho, entre el interior del lecho
y el exterior (despreciamos el almacenamiento de energía en la pared)
a_w=4/d_lecho;%area de la pared interior del lecho por unidad de
volumen del lecho

%CALCULO DE CONDUCTIVIDADES TÉRMICAS EFECTIVAS: **N. Wakao y S. Kaguei
[2]**
if Re_d <= 0.8
    K_Fx = 0.7*K_F;
else
    K_Fx = (0.5*Pr*Re_d*K_F)/epsilon_s;
end

m=0.28-0.757*log10(epsilon_s)-0.057*log10(K_S/K_F);
Ke0=K_F*((K_S/K_F)^m);
K_Sx=(Ke0+0.5*Pr*Re_d*K_S-epsilon_s*K_Fx)/(1-epsilon_s);
```

```
%CALCULO DE LOS NUMEROS DE BIOT Y FOURIER
Bi_A=(h*(L^2)*a_p)/(K_Fx*epsilon_s); %numero de biot del aire
Bi_S=(h*(L^2)*a_p)/(K_Sx*(1-epsilon_s)); %numero de biot de la arena
Bi_W=(U*(L^2)*a_w)/(K_Fx*epsilon_s); %numero de biot de la pared
Fo_A=K_Fx/(L*u*rho_F*cp_F); %numero de Fourier del aire
Fo_S=K_Sx/(L*u*rho_S*cp_S); %numero de fourier de la arena
Num_Adim(1)=Bi_A;
Num_Adim(2)=Bi_S;
Num_Adim(3)=Fo_A;
Num_Adim(4)=Fo_S;
Num_Adim(5)=Bi_W;
```

```
%
```

```
%% OBTENCION DE LA MATRIZ DE TEMPERATURAS ADIMENSIONAL [T]
tiemposimulacion=2*60; %tiempo simulación en minutos
dx_dim=0.005;
dx=dx_dim/L; %adimensionalización de dx
dt=dx; %condicion de convergencia CFL
t=floor(tiemposimulacion*60*(u/(L*dt))); %adimensionalizacion del
tiempo de simulacion
n=floor(L/dx_dim)+1; %numero de nodos
T=zeros(2*n,floor(t/10));
T=funcion(n,t,dx,dt,Num_Adim,vectorT);
```

## FUNCION.M

```
%Función que devuelve la temperatura en cada nodo del lecho para cada
%instante dt.
%Necesita como parámetros el numero de nodos (n), el tiempo total de
%simulación (t), el paso espacial adimensional (dx), el paso temporal
%adimensional (dt) y un vector que contenga los números adimensionales
%de Biot y Fourier para el solido y el fluido.
```

```
function T=funcion(n,t,dx,dt,Num_Adim,vectorT)
```

```
Bi_A=Num_Adim(1);
Bi_S=Num_Adim(2);
Bi_W=Num_Adim(5);
Fo_A=Num_Adim(3);
Fo_S=Num_Adim(4);
T0=vectorT(1);Tin=vectorT(2);Tmax=vectorT(3);
```

```
%
```

```
%M·T(t+1)=H·T(t)+B
%SE CREAN LAS MATRICES [H] Y [B]
H=eye(2*n);
H(1,1)=0;H(n,n)=0;H(n+1,n+1)=0;H(2*n,2*n)=0;
B=zeros(2*n,1);
B(1)=(Tin-T0)/(Tmax-T0);%cond. contorno del fluido para x=0
```

```
%SE CREA LA MATRIZ [T]
T=zeros(2*n,1);
```

```
%SE CREA LA MATRIZ [M]
M=zeros(2*n);

%SE IMPLEMENTA LA CONDICION DE CONTORNO EN t=0: That=Ohat=0
T(:,1)=0;

%RELLENAMOS LA MATRIZ [M] CON LAS CONDICIONES DE CONTORNO
M(1,1)=1; %cond. contorno del fluido para x=0
M(n+1,n+1)=1; M(n+1,n+2)=-1; %cond. contorno del solido para x=0
M(n,n-1)=1; M(n,n)=-1; %cond. contorno del fluido para x=L
M(2*n,2*n-1)=1; M(2*n,2*n)=-1; %cond. contorno del solido para x=L

%RELLENAMOS EL RESTO DE ELEMENTOS DE [M]
for i=2:(n-1)
    %elementos de M correspondientes al fluido
    M(i,i-1)=-(dt*Fo_A+dt*dx)/(dx^2);
    M(i,i)=(dx^2+2*dt*Fo_A+dt*Fo_A*Bi_A*(dx^2)+dt*dx+dt*Fo_A*
    *Bi_W*(dx^2))/(dx^2);
    M(i,i+1)=-(dt*Fo_A)/(dx^2);
    M(i,i+n)=-dt*Fo_A*Bi_A;
    %elementos de M correspondientes al solido
    M(n+i,i)=-dt*Fo_S*Bi_S;
    M(n+i,n+i-1)=-(dt*Fo_S)/(dx^2);
    M(n+i,n+i)=(dx^2+2*dt*Fo_S+dt*Fo_S*Bi_S*(dx^2))/(dx^2);
    M(n+i,n+i+1)=-(dt*Fo_S)/(dx^2);
end

Tviej0=T(:,1);
j=1;
%CALCULAMOS LA MATRIZ DE TEMPERATURAS
for i=2:t

    if i>=t/2 %cambiamos condicion para descarga al cabo de 1h
        Tin=T0;
        B(1)=(Tin-T0)/(Tmax-T0);
    end

    Tnuevo=(M\ (H*Tviej0))+M\B;
    if rem(i,10)==0
        j=j+1;
        T(:,j)=Tnuevo;
    end

    Tviej0=Tnuevo;
end
```